Minimalflächen und holomorphe Funktionen

Sommerkurs im Sommersemester 2008
an der Humboldt Universität zu Berlin.

Prof. Helga Baum

Herausgabe: 23. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In diesem Kompaktkurs wollen wir uns einer schon recht alten Fragestellung widmen. Bereits im Jahr 1760 stellte sich Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) die Frage, ob es für eine geschlossene, beliebig geformte Kurve Γ im $\mathbb{R}^3$ eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ mit „$\partial M = \Gamma$“ gibt, deren Flächeninhalt Area(M) minimal unter allen solchen Flächen ist. Schon bald stellte sich heraus, dass die Konstruktion solcher Flächen $M \subset \mathbb{R}^3$ im Experiment leicht ist: nimmt man einen oder mehrere Drahtbügel (also ein experimentell genutzter Gegenstand, welcher die Raumkurve Γ repräsentiert) und taucht diesen in eine Seifenlauge, so entsteht i. a. eine Minmalfläche (die Begründung liegt in der Physik und der Proportionalität der kinetischen Energie und der Fläche).

1.1 Beispiele für Minimalflächen

Bereits wenig später entdeckten die ersten Mathematiker erste Minimalfächen. Erste Beispiele stammen von Meusnier (1776: Katenoid und Wendelfäche), sowie von Scherk (1835: Scherksche Flächen).

1.2 Ideen zur Charakterisierung von Minimalflächen

Eine erste Idee zur Charakterisierung von Minimalflächen stammt vom Mathematiker Jean-Baptiste Meusnier (1754 - 1793). Er stellte die Vermutung auf, dass die Minimalitätsfrage des Flächeninhaltes mit der Krümmung der Fläche zu tun hat. Genauer gesagt: ist $M \subset \mathbb{R}^3$ eine „Minimalfläche“, so ist der Mittelwert der Normalen Krümmung von Kurven auf M durch $x \in M$ Null (wir werden diese Krümmung später als mittlere Krümmung H kennen lernen).

Während dieses Seminars werden wir dazu unter anderem folgenden Satz beweisen: ist $M_t = f_t(M) \subset \mathbb{R}^3$ eine Schar von Flächen mit $M_0 = M$ und f eine lokale Parametrisierung und

$$a : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \mathrm{Area}(M_t),$$

dann gilt:

$$a'(0) = 0 \Longleftrightarrow H \equiv 0.$$

Eine weitere Vermutung äußerte der Physiker Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801 - 1883), nachdem er diverse Experimente mit den bereits erwähnten Seifenhäuten durchführte. Er postulierte: ist $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine Kurve im $\mathbb{R}^3$ und Γ homöomorph zu $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x||_2^2 = 1\}$ (d.h. eine sog. Jordan-Kurve), so existiert eine Minimalfläche M mit „$\partial M = \Gamma$“. Der Beweis dieser Vermutung erfolgte erst im Jahr 1931 durch Douglas/Radó (durch einen Existenzberweis).

1.3 Motivation

Innerhalb dieses Kompaktkurses wollen wir uns nun der Frage stellen, was Minimalflächen mathematisch sind und wie sie sich charakterisieren bzw. konstruieren lassen. Insbesondere wollen wir untersuchen, wie man holomorphe Funktionen (d. h. komplex-differenzierbare Funktionen) dazu benutzen kann, solche Flächen zu erzeugen. Dies führt uns schließlich auf die Weierstraß-Darstellungen, benannt nach und ersonnen durch den Mathematiker Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897).

2 Krümmung orientierter Flächen

2.1 Begriffe

Zu Beginn wollen wir an einige Begriffe und Sätze der Grundvorlesungen zur Analysis auf Untermannigfaltigkeiten erinnern.

Definition 1 *Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte, 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit (UMF) im $\mathbb{R}^3$. Dann nennen wir M^2 eine (reguläre) Fläche.*

Soweit nicht anderweitig definiert, bezeichne M^2 oder kurz M im folgenden stets eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ im eben definierten Sinne.

Definition 2 *Sei $M^2 = M$ eine Fläche, $x \in M$ und*

$$T_xM := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \exists C^1\text{-Kurve } \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M \text{ mit } \gamma(0) = x,\ \gamma'(0) = v\}$$

der Tangentialraum an M im Punkt x, so bezeichnet die induzierte Riemannsche Metrik

$$I_x := g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R},\ I_x(v, w) := \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

die erste Fundamentalform von M. Es ist bekannt, dass dann (T_xM, I_x) ein 2-dimensionaler euklidischer Vektorraum ist.

Definition 3 *Ist $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, so definiert $n : M \longrightarrow S^1 \in C^\infty$ mit $n(x) \perp T_xM$, $(v_1, v_2, n(x)) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^3}$, $v_i \in O_{T_xM}$ das Gaußsche Normalenfeld.*

Fortan bezeichnet n, soweit nicht anders angegeben, das soeben definierte Gaußsche Normalenfeld.

Definition 4 *Wir bezeichnen mit $\mathfrak{X}(M) \subset C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ den Raum, definiert durch*

$$X \in \mathfrak{X}(M) :\Leftrightarrow X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3 \in C^\infty \text{ und } x \mapsto X(x) \in T_xM$$

und nennen $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M.
Sind $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, so heißt die glatte Abbildung $X(Y) : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$X(Y)(x) := dY_x(X(x)) = \frac{d}{dt} Y(\gamma(t))|_{t=0},\ x \in M$$

Richtungsableitung von Y in Richtung X. Die Zerlegung

$$X(Y)(\cdot) = \mathrm{proj}_{T.M}(X(Y)(\cdot)) + \langle X(Y)(\cdot), n(\cdot)\rangle_{\mathbb{R}^3}\, n(\cdot)$$

in die tangentiale Komponente $\nabla_X Y := \mathrm{proj}_{T.M}(X(Y))$ und die normale Komponente $II(X, Y) := \langle X(Y), n\rangle_{\mathbb{R}^3}$ definiert die kovariante Ableitung $\nabla_X Y$ von Y, sowie die zweite Fundamentalform $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty$.

Satz 1 *Seien $X, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Die kovariante Ableitung $\nabla_X Y$ hat folgende Eigenschaften:*

a) $X(\langle Y_1, Y_2\rangle) = \langle \nabla_X Y_1, Y_2\rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_2\rangle$ *(Verträglichkeit mit der Metrik),*

b) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ *(torsionsfrei),*

c) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f \cdot \nabla_X Y$ *für alle* $f \in C^\infty$.

Beweis: wir beweisen nur die Behauptungen a) und b).
a) es gilt

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y_1, Y_2\rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_2\rangle &= \langle \mathrm{proj}_{TM} X(Y_1), Y_2\rangle + \langle Y_1, \mathrm{proj}_{TM} X(Y_2)\rangle \\
&= \langle X(Y_1), Y_2\rangle + \langle Y_1, X(Y_2)\rangle \qquad (1) \\
&= X(\langle Y_1, Y_2\rangle),
\end{aligned}$$

wobei wir in (1) benutzt haben, dass $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

b) es ist bekannt, dass der Kommutator $[X, Y] := X(Y) - Y(X)$ zweiter Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ebenfalls in $\mathfrak{X}(M)$ liegt. Damit folgt sofort

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \mathrm{proj}_{TM}(X(Y) - Y(X)) = [X, Y].$$

$\square$

Bemerkung 1 *Kovariante Ableitungen mit den Eigenschaften a) und b) aus Satz 1 sind eindeutig bestimmt. Der Zusammenhang ∇ heißt auch Levi-Civita-Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M.*

Satz 2 *Die zweite Fundamentalform $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty$ hat folgende Eigenschaften:*

1. *II ist bilinear über $C^\infty(M)$,*

2. *II ist symmetrisch, i. a. aber nicht positiv definit,*

3. $II(X, Y) = -\langle Y, dn(X)\rangle$,

für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $dn(Y) = dn(X)(x) := dn_x(X(x))$ für $x \in M$.

Beweis:
1) Übung.
2) $II(X, Y) - II(Y, X) = \langle X(Y) - Y(X), n\rangle = \langle [X, Y], n\rangle = 0$ wegen $[X, Y] \perp_{I_x} n$.
3) $II(X, Y) = \langle X(Y), n\rangle$ nach Definition. Nach Anwendung der Produktregel der Richtungsableitung im $\mathbb{R}^3$ erhalten wir:

$$\langle X(Y), n\rangle = \underbrace{X(\langle Y, n\rangle)}_{\equiv 0} - \langle Y, X(n)\rangle = -\langle Y, dn(X)\rangle\,.$$

$\square$

Bemerkung 2 *Punkt 1) aus Satz 2 hat zur Folge, dass II einer Familie $\{II_x\}_{x\in M}$ punktweise definierter, symmetrischer Bilinearformen $II_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ entspricht. Man erhält nämlich eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} II & \longrightarrow & II_x(v,w) := II(X,Y)(x) \\ II(X,Y)(x) := II_x(v,w) & \longleftarrow & \{II_x\}_{x\in M} \end{array}$$

für $X, Y \in \mathfrak{X}(M), X(x) = v, Y(x) = w$.

Als Resultat erhalten wir für ein $x \in M$ einen euklidischen Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform: (T_xM, I_x, II_x). Der Satz von der Hauptachsentransformation garantiert uns nun eine Orthonomalbasis (ONB) (e_1, e_2) im euklidischen Vektorraum (T_xM, I_x), sodass

$$(II_x(e_i, e_j))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Im folgenden wird es nun um die Hauptwerte λ_1, λ_2 gehen.

Definition 5 *Die Hauptwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ heißen Hauptkrümmungen von M in $x \in M$. Der Wert*

- *$K(x) := \lambda_1\lambda_2$ heißt Gauß-Krümmung,*
- *$H(x) := \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ heißt mittlere Krümmung*

von M in x. Die Vektoren e_1, e_2 mit $II_x(e_i, e_j) = \delta_{ij}\lambda_i$ werden auch Krümmungsvektoren genannt.

Definition 6 *Die Fläche M heißt Minimalfläche, falls $H(x) = 0$ für alle $x \in M$ ist.*

2.2 Rechtfertigung der Krümmungsbegriffe für K und H

2.2.1 Krümmung ebener Kurven

Um zu erklären, was die Krümmung einer Fläche ist, werden wir zunächst den Krümmungsbegriff für ebene Kurven definieren. Dazu betrachten wir im folgenden reguläre Kurven $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, d. h. mit $\gamma'(t) \neq 0$, welche zumindest von der Klasse C^2 sind und parametrisieren diese auf Bogenlänge, d.h. $||\gamma'(t)|| \equiv 1$, z.B. $\gamma'(t) = (\cos(\omega(t)), \sin(\omega(t)))$. Der Wert $\omega(t)$ heißt auch Drehwinkel dder Tangente an γ in $t \in I$.

Definition 7 *Die Krümmung einer auf Bogenlänge parametrisierten, regulären Kurve γ in t ist der Wert*

$$k(t) := \omega'(t),$$

wobei $\omega(t)$ den Drehwinkel der Tangente beschreibt. Anschaulich beschreibt sie die Geschwindigkeit, mit der sich der Tangentialvektor an die Kurve γ dreht.

Da γ auf Bogenlänge parametrisiert ist, gilt

$$||\gamma'(t)|| \equiv 1,\ \gamma''(t) \perp \gamma'(t).$$

Damit ist aber $\gamma''(t) = \lambda \cdot D_{\frac{\pi}{2}}(\gamma'(t))$, wobei $D_{\frac{\pi}{2}}(v)$ eine Drehung von $v \in \mathbb{R}^3$ um $\frac{\pi}{2}$ entgegen dem UZS beschreibt. Daher gilt das folgende

Lemma 1 *Sei $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve und $(a_1(t), a_2(t))$ das begleitende System, bestehend aus dem Tangentialvektor $a_1(t) = \gamma'(t)$ und dem Normalenvektor $a_2(t) = D_{\frac{\pi}{2}}(\gamma'(t))$. Dann gilt:*

$$\gamma''(t) = k(t) \cdot a_2(t).$$

Beweis: Es gilt $\gamma''(t) = (-\sin(\omega(t))\omega'(t), \cos(\omega(t))\omega'(t)) = \omega'(t) \cdot (-\sin\omega(t), \cos\omega(t))$. Mit $k(t) = \omega'(t)$ und $D_{\frac{\pi}{2}}(\gamma'(t)) = (-\sin\omega(t), \cos\omega(t))$ folgt die Behauptung. □

Beispiel 1 *Die Krümmung des Kreises: $\gamma(t) := (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r})$ für $t \in [0, 2\pi]$ parametrisiert den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ vom Radius r. Damit ist $k^{Kreis}(r) = \frac{1}{r}$.* ◁

Definition 8 *Die Krümmung einer beliebigen, regulären Kurve γ in t ist der Wert*

$$k(t) := \frac{\omega'(t)}{||\gamma'(t)||}.$$

Lemma 2 *Sei $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine beliebige reguläre Kurve. Dann gilt:*

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{||\gamma'(t)||^3}.$$

Beweis: ohne Beweis. □

2.2.2 Zusammenhang zwischen zweiter Fundamentalform und Krümmung

Wir wollen nun den Begriff der Normalenkrümmung einer Fläche definieren. Dazu sei $x \in M$ ein Punkt der Fläche, $v \in T_xM$ und $||v|| = 1$. Man betrachtet nun den Schnitt $\Gamma_v = M \cap E_v$ der Fläche mit dem Raum

$$E_v := x + \operatorname{span}(v, n(x)).$$

Das Objekt Γ_v ist eine ebene Kurve innerhalb der Ebene $E_v \cong \mathbb{R}^2$ (eine Isomorphie erhalten wir z.B. durch $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + u_1 v + u_2 n(x)$). Die Tangente der Kurve $\Gamma_v \subset E_v$ im Punkt $x \in M$ ist dann der Schnitt $E_v \cap \operatorname{Tan}_x M$. Mithilfe dieser Überlegungen erhalten wir nun die Voraussetzungen für die Krümmungsdefinition durch den folgenden Satz.

Satz 3 *Seien $x \in M$, $v \in T_xM$ und $||v|| = 1$, sowie $\Gamma_v = M \cap E_v$.*

1. *Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ eine beliebige Kurve auf M mit $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$ und nach Bogenlänge parametrisiert. Dann gilt:*
$$II_x(v, v) = \left\langle \gamma''(0), n(x) \right\rangle .$$
2. *Sei γ_v eine Parametrisierung von $\Gamma_v = M \cap E_v$, d.h. eine Kurve in Γ_v mit $\gamma_v(0) = x, \gamma_v'(0) = v$, $||\gamma_v'(t)|| = 1$. Dann ist*
$$II_x(v, v) = k^{\gamma_v}(0)$$
die Krümmung von Γ_v in x.

Beweis: 1) es gilt

$$\begin{aligned} II_x(v,v) &\overset{\text{Satz 2}}{=} -\langle v, dn_x(v)\rangle = -(\left\langle \gamma'(t), dn_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\right\rangle)|_{t=0} = -(\left\langle \gamma'(t), \tfrac{d}{dt}(n(\gamma(t)))\right\rangle)|_{t=0} \\ &\overset{\text{PR}}{=} -\tfrac{d}{dt}\underbrace{\left\langle \gamma'(t), n(\gamma(t))\right\rangle}_{=0}|_{t=0} + \langle \gamma''(t), n(\gamma(t))\rangle|_{t=0} . \end{aligned}$$

2) Sei γ_v eine Parametrisierung zu Γ_v, $a_1 = v$, $a_2 = n(x)$ ein begleitendes System. Nach Lemma 1 gilt dann

$$\langle k^{\gamma_v}(0), n(x)\rangle = \gamma_v''(0) \overset{1)}{\Longrightarrow} II_x(v,v) = \left\langle \gamma_v''(0), n(x)\right\rangle = k^{\gamma_v}(0).$$

□

Definition 9 *$k_x(v) := II_x(v, v)$ heißt Normalenkrümmung von M im Punkt x in Richtung v, $||v|| = 1$. Damit sind die Werte λ_i die Normalenkrümmungen in Richtung e_i für $i = 1, 2$.*

In Definition 5 haben wir λ_1, λ_2 den Namen „Hauptkümmungen" gegeben. Diese Wahl rechtfertigt der nun folgende Satz.

Satz 4 *Für die Hauptkrümmungen λ_1, λ_2 (gemäß Definition 5) gilt:*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \min\{k_x \mid v \in T_xM,\ ||v|| = 1\}, \\ \lambda_2 &= \max\{k_x \mid v \in T_xM,\ ||v|| = 1\}. \end{aligned}$$

Beweis: bezeichne (e_1, e_2) eine ONB im euklidischen Raum (T_xM, I_x) mit

$$(II_x(e_i, e_j))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

und sei $v \in T_xM$ mit $||v|| = 1$, d.h. es existiert eine Darstellung

$$v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$$

mit $\theta = \sphericalangle(e_1, v)$. Damit erhält man

$$II_x(v, v) \overset{\text{Def}}{=} k_x(v) = \cos\theta^2\lambda_1 + \sin\theta^2\lambda_2.$$

Eine Diskussion der Extrema ergibt schließlich die Behauptung. □

Folgerung 1 *Die Normalenkrümmung $k_x(v) = II_x(v,v)$ beschreibt die Abweichung der Fläche M von der Tangentialebene $\mathrm{Tan}_x M$ im Punkt $x \in M$ in Richtung $v \in T_x M$, d.h. II_x beschreibt die Lage der Fläche nahe x bezüglich der Tangentialebene $\mathrm{Tan}_x M$.*

Motiviert durch diese Beobachtung klassifizieren wir nun die Punkte auf der Fläche M durch die folgende Definition.

Definition 10 *Sei $x \in M$ ein Punkt der Fläche M. Dann heißt x ein*

- *elliptischer Punkt, falls $k(x) > 0$ (d.h. $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ oder $\lambda_1, \lambda_2 > 0$);*
- *hyperbolischer Punkt, falls $k(x) < 0$ (d.h. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ oder $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$);*
- *parabolischer Punkt, falls $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ bzw. $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 = 0$;*
- *Flachpunkt, falls $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.*

Folgerung 2 *Für $x \in M$ gilt*

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(v(\theta)) d\theta,$$

wobei $\theta = \sphericalangle(e_1, v)$.

Beweis: für die Normalenkrümmung $k(v(\theta))$ gilt

$$k(v(\theta)) = \cos^2 \theta \lambda_1 + \sin^2 \theta \lambda_2$$

(siehe Satz 4). Damit folgt

$$\int_0^{2\pi} k(v(\theta)) d\theta = \lambda_1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\pi} + \lambda_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{\pi} = 2\pi \cdot \underbrace{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}}_{H(x)}.$$

□

2.3 Berechnung der Krümmungen

In den folgenden Abschnitten wollen wir untersuchen, wie sich Krümmungen möglichst einfach bestimmen lassen. Dazu erinnern wir uns an drei wesentliche Möglichkeiten, Untermannigfaltigkeiten zu charakterisieren: so lässt sich zeigen, dass lokal parametrisierbare Teilmengen $M^n \subset \mathbb{R}^N$, Graphen von Funktionen und gleichungsdefinierte Flächen stets UMF sind. Auf diese drei Darstellungen wollen wir nun eingehen.

2.3.1 Berechnung mithilfe lokaler Parametrisierungen

Wir erinnern zunächst an den Begriff der lokalen Parametrisierung: sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine glatte Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten u_1, u_2 heißt lokale Parametrisierung von M^2 um $x \in M$, falls

1. $f(U) \subset M$ und $x \in f(U)$,
2. $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}$ sind linear unabhängig und
3. $f : U \to f(U)$ ist ein Homöomorphismus.

Der Tangentialraum im Punkt $f(u_0),\ u_0 \in U$ berechnet sich dann zu

$$T_{f(u_0)}M = \operatorname{span}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_0), \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_0)\right).$$

Die Matrix

$$\left(I_{f(u_0)}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0), \frac{\partial f}{\partial u_j}(u_0)\right)\right)_{i,j=1,2} =: (g_{ij})_{i,j=1,2}$$

beschreibt dann die erste Fundamentalform und

$$\left(II_{f(u_0)}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0), \frac{\partial f}{\partial u_j}(u_0)\right)\right)_{i,j=1,2} =: (h_{ij})_{i,j=1,2}$$

die zweite Fundamentalform. Ein äußeres Normalenfeld $n : M^2 \to S^2$ kann man zudem leicht durch

$$n(f(u_0)) := \frac{\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_0) \times \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_0)}{\left\|\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_0) \times \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_0)\right\|}$$

angeben. Im folgenden bezeichnen wir mit n_f auch die Komposition $n \circ f$.

Satz 5 *In einer lokalen Parametrisierung $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gilt*

$$h_{ij}(u_0) = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u_0), n_f(u_0)\right\rangle = -\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0), \frac{\partial n_f}{\partial u_j}(u_0)\right\rangle.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
h_{ij}(u_0) \quad &= \quad II_{f(u_0)}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0), \frac{\partial f}{\partial u_j}(u_0)\right) \\
&\overset{\text{Satz 2}}{=} -\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0), dn_{f(u_0)}\left(\frac{\partial f}{\partial u_j}(u_0)\right)\right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&\overset{\text{KR}}{=} -\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0), \frac{\partial}{\partial u_j}(n \circ f)(u_0)\right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&\overset{\text{PR}}{=} -\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, n_f\right\rangle\right)(u_0) + \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u_0), n_f(u_0)\right\rangle \\
&\overset{\frac{\partial f}{\partial u_i} \perp n_f}{=} \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u_0), n_f(u_0)\right\rangle.
\end{aligned}$$

□

Satz 6 *Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung von M um $x \in M$ und $u \in U$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} K(f(u)) &= \frac{\det(h_{ij}(u))}{\det(g_{ij}(u))}, \\ H(f(u)) &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left((g_{ij}(u))^{-1} \circ (h_{ij})\right). \end{aligned}$$

Dabei sind λ_1 und λ_2 die Nullstellen der quadratischen Funktion

$$\lambda^2 - 2H(f(u))\lambda + K(f(u)),$$

d.h. $\lambda_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$.

Beweis: seien $e_1, e_2 \in T_xM$ Krümmungsvektoren, d.h. $g_x(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ und $II_x(e_i, e_j) = \delta_{ij}\lambda_i$. Wir führen nun einen Basiswechsel von (e_1, e_2) nach $(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2})$ mithilfe der Matrix $A = (A_{ij})$ durch:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0) = \sum_{k=1}^{2} A_{ki} e_k.$$

Damit erhalten wir

$$(h_{ij}) = \left(II \left(\frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right) \right) = \sum_{k,\ell} A_{ki} \underbrace{II(e_k, e_\ell)}_{\delta_{k\ell}\lambda_\ell} A_{\ell j}$$

und analog auch (g_{ij}), also:

$$\begin{aligned} (h_{ij}) &= A^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} A \\ (g_{ij}) &= A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \end{aligned}$$

und damit

$$(g_{ij})^{-1} \circ (h_{ij}) = A^{-1}(A^T)^{-1} \circ A^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} A = A^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} A.$$

Also gilt $\operatorname{Tr}((g_{ij})^{-1} \circ (h_{ij})) = \lambda_1 + \lambda_2$ und $\det((g_{ij})^{-1} \circ (h_{ij})) = \lambda_1\lambda_2$, denn sowohl Tr, als auch det sind invariant unter Matrixkonjugation. Dies zeigt die Behauptung. □

2.3.2 Flächen als Graphen von Funktionen

Satz 7 *Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt und $M^2 = \operatorname{graph}(\varphi) = \{(x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$. Dann ist M^2 genau dann eine Minimalfläche, wenn*

$$0 = (1 + (\varphi_y)^2)\varphi_{xx} + (1 + (\varphi_x)^2)\varphi_{yy} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy},$$

wobei $\varphi_x := \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\varphi_y := \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Beweis: Übung. □

2.3.3 Gleichungsdefinierte Flächen

Satz 8 *Sei* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *glatt und* $\operatorname{grad} F(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^3$*:* $F(x) = 0$*. Dann ist* $M^2 := F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$ *eine 2-dimensionale UMF im* $\mathbb{R}^3$ *und für die mittlere Krümmung* H *von* M^2 *gilt*

$$H(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{div}^{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\operatorname{grad} F(x)}{||\operatorname{grad} F(x)||} \right),$$

wobei die Divergenz $\operatorname{div}^{\mathbb{R}^3}$ *bezüglich euklidischer Koordinaten durch*

$$\operatorname{div}^{\mathbb{R}^3} X = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_i}$$

für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$*,* $X : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto X(x) \in \mathbb{R}^3$ *mit* $X = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ *gegeben ist.*

Beweis: Übung. □

3 Minimalflächen und Variantion des Flächeninhalts

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie sich Minimalflächen M^2 charakterisieren lassen. Hierzu betrachten wir spezielle Scharen $\{M_t\}_t$ von Teilflächen (sogenannte *kompakte Variationen*) und untersuchen unter anderem die Frage, wie sich die Abbildung

$$t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \operatorname{Area}(M_t)$$

verhält. Dadurch können wir schließlich notwendige und hinreichende Bedingungen für die Minimalität einer Fläche im Sinne von Definition 6 beweisen. Im folgenden sei also $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Definition 11 *Unter einer kompakten Variation der Fläche* M^2 *versteht man eine Schar von Flächen* $\{M_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$*,* $\varepsilon > 0$*, definiert durch*

$$M_t := \{x + th(x)n(x) \mid x \in M^2\} \subset \mathbb{R}^3, \ h \in C^\infty(M^2)$$

(d.h. $M_0 = M$*), wobei* $\operatorname{supp}(h)$ *kompakt sein soll.*

Zunächst zeigen wir einen Hilfssatz, welchen wir anschließend benötigen werden.

Lemma 3 *Es gilt*

$$dM_t = (1 - 2Hht)dM + O(t^2)$$

mittels Taylorentwicklung, wobei $O(t^2) \in \Lambda^2_x T^*_x M$ *mit* $||O(t^2)|| \leq C_x t^2$*,* $C_x \in \mathbb{R}$ *fest.*

Beweis: wir führen den Beweis lokal in $x \in M$. Sei also $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung von M um $x \in M$ und U offen. Dann gilt für die Volumenform

$$dM_x = \sqrt{\det(g_{ij}(u_0))} du_1 \wedge du_2,$$

wobei $u_0 \in U$ und u_1, u_2 bezeichnen die Koordinaten von f. Sei

$$f_t : u \in U \mapsto f(u) + th(f(u)) + n(f(u)) \in \mathbb{R}^3$$

eine lokale Parametrisierung von M_t. Des Weiteren bezeichnen $\hat{h} := h \circ f$ und $\hat{n} := n \circ f$ die Kompositionen. Sodann folgt

$$dM_t = \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial f_t}{\partial u_i}(u_0), \frac{\partial f_t}{\partial u_j}(u_0)\right\rangle\right)_{i,j}} du_1 \wedge du_2$$

mit

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_k} = \frac{\partial f}{\partial u_k} + t\hat{n} \cdot \frac{\partial \hat{h}}{\partial u_k} + t\hat{h} \cdot \frac{\partial \hat{n}}{\partial u_k}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial f_t}{\partial u_i}(u_0), \frac{\partial f_t}{\partial u_j}(u_0)\right\rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0), \frac{\partial f}{\partial u_j}(u_0)\right\rangle \\ &\quad + t\hat{h}\left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0), \frac{\partial f_t}{\partial \hat{n}}(u_0)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_j}(u_0), \frac{\partial \hat{n}}{\partial u_j}(u_0)\right\rangle\right) + O(t^2),\end{aligned}$$

wobei wir die Orthogonalität von $\hat{n}$ bezüglich der Tangentialvektoren benutzt haben. Mit der Bezeichnung $dM_t = \sqrt{\det(g^t_{ij}(u_0))} du_1 \wedge du_2$ folgt

$$g^t_{ij} = g_{ij} - 2t\hat{h} \cdot h_{ij} + O(t^2)$$

und man errechnet

$$\begin{aligned}\det((g^t_{ij})) &= \det((g_{ij})) - 2t\hat{h}(g_{22}h_{11} + g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12}) + O(t^2) \\ &\quad \left(\text{Nutze: } H = \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}((g_{ij})^{-1}(h_{ij})) = \tfrac{1}{2}\tfrac{g_{22}h_{11}+g_{11}h_{22}-2g_{12}h_{12}}{\det(g_{ij})}\right) \\ &= \det((g_{ij})) - 4t\hat{h}\det(g_{ij}) \cdot H + O(t^2) \\ &= \det((g_{ij}))(1 - 4t\hat{h}H + O(t^2)).\end{aligned}$$

Sei nun $\alpha(t) := \sqrt{1 + \alpha \cdot t + O(t^2)}$. Eine Taylorentwicklung von $\alpha(\cdot)$ zeigt dann

$$\alpha(t) = 1 + \frac{\alpha}{2}t + O(t^2).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{\det((g^t_{ij}))} &= \sqrt{\det((g_{ij}))} \cdot \sqrt{1 - 4t\hat{h}H + O(t^2)} \\ &= \sqrt{\det((g_{ij}))}(1 - 2\hat{h}Ht + O(t^2))\end{aligned}$$

und schließlich

$$(dM_t)_x = (1 - 2\hat{h}(x)H(x)t + O(t^2))dM_x.$$

□

Das Ziel ist nun die Charakterisierung:

$$M^2 \text{ Minimalfläche } \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(\mathrm{Area}(M_t))|_{t=0} = 0 \text{ für alle kompakten Variationen.} \quad (2)$$

Zum Beweis zeigen wir zuvor einen Satz, aus dem die Richtigkeit der Aussage (2) unmittelbar folgt.

Satz 9 *Für die mittlere Krümmung H gilt:*

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Area}(M_t))|_{t=0} = -2\int_M H \cdot h dM.$$

Beweis: allgemein gilt

$$\mathrm{Area}(M_t) = \int_{M_t} dM_t.$$

Aus Lemma 3 erhalten wir eine Abhängigkeit der Volumenform dM_t vom Parameter t; sodann gilt

$$\mathrm{Area}(M_t) = \int_M (1 - 2\hat{h}(x)H(x)t + O(t^2))dM.$$

Aus Stetigkeitsgründen sind das Integral und der Operator $\frac{d}{dt}$ vertauschbar. Insgesamt erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Area}(M_t))|_{t=0} = \int_M \frac{d}{dt}(1 - 2\hat{h}(x)H(x)t + O(t^2)dM)|_{t=0} = \int_M -2hHdM.$$

□

Damit erhalten wir die gewünschte Aussage (2) als Folgerung.

Folgerung 3 *(Charakterisierung von Minimalflächen)*

1. *Ist M^2 eine Minimalfläche, so ist $\frac{d}{dt}(\mathrm{Area}(M_t))|_{t=0} = 0$.*
2. *Ist $\frac{d}{dt}(\mathrm{Area}(M_t))|_{t=0} = 0$ für alle kompakten Variationen, so ist $H \equiv 0$.*

Beweis: 1) ist M eine Minimalfläche, so gilt per definitionem $H \equiv 0$ und demnach

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Area}(M_t))|_{t=0} \overset{\text{Satz 9}}{=} -2\int_M 0dM = 0.$$

2) angenommen es gäbe ein $x \in M$ mit $H(x) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung $U(x) \subset M$ mit $H|_U > 0$. Sei nun $h \in C^\infty(M)$ mit $h(x) > 0$ und $\mathrm{supp}(h) \subset U$ eine Funktion gemäß der Definition 11. Demnach erhalten wir $Hh \geq 0$ auf U und somit

$$0 = \int_M Hh\ dM = \int_U Hh\ dM.$$

Demnach muss $Hh \equiv 0$ gelten, da die Funktion $\mu(A) = \int_A dM$ ein Maß beschreibt. □

Einen Satz, welcher den Begriff der Minimalfläche M in dem Sinne rechtfertigt, dass sie im gewissen Maße diejenige Fläche unter einer Familie anderer Flächen ist, welche minimalen Flächeninhalt $\mathrm{Area}(M)$ besitzt, wollen wir nun zitieren.

Satz 10 *Sei M eine Minimalfläche, $x \in M$. Dann existiert eine (eventuell sehr kleine) relativ kompakte, offene Umgebung $D(x) \subset M$ um x mit der Eigenschaft*

$$\mathrm{Area}(\tilde{M}) > \mathrm{Area}(M)$$

für alle Flächen, die man aus M durch eine kompakte Änderung innerhalb von $D(x)$ erhält.

Beweis: ESCHENBERG/JOST, SEITE 102-105. □

Beispiel 2 *(Vergleich zwischen dem Flächeninhalt des Zylinders und des Katenoids)*

Sei $Z = S^1_{\cosh(1)} \times [-1, 1]$ der Zylinder mit Radius $\cosh(1)$ und K das Katenoid

$$K = \{(\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), u) \mid u \in [-1, 1], v \in \mathbb{R}\}.$$

Wir fragen uns nun, wie die beiden Oberflächeninhalte $\mathrm{Area}(Z)$ und $\mathrm{Area}(K)$ zueinander in Beziehung stehen. Hierzu rechnen wir beide werte konkret aus:

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(K) &= \int_K dK = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \cosh^2(u)dvdu = 2\pi\int_{-1}^{1}\cosh^2(u)du = 2\pi\left(\frac{1}{2}\sinh(2)+1\right), \\ \mathrm{Area}(Z) &= 2\cdot 2\pi\cosh(1). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathrm{Area}(K) \approx 2\pi \cdot 2.81 < \mathrm{Area}(Z) \approx 2\pi \cdot 3.09.$$

◁

In der Tat gilt sogar noch mehr, nämlich die folgende Bemerkung.

Bemerkung 3 *Das Katenoid ist die einzige Minimalfläche unter den Rotationsflächen.*

4 Konstruktion von Minimalflächen

Aus den vorherigen Abschnitten wissen wir, was Minimalflächen sind, wie sie sich charakterisieren lassen und welche speziellen Flächen es gibt. In diesem letzten Abschnitt wollen wir nun untersuchen, wie sich Minimalfächen konstruieren lassen. Insbesondere wird uns dies zu den *holomorphen Funktionen* führen, welche der Leser bisher eventuell vermisst hat.

4.1 Isotherme Parametrisierungen

Definition 12 *Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und U offen. Eine lokale Parametrisierung $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ von M^2 heißt isotherm (bzw. konform), falls gilt:*

$$(g_{ij})_{i,j=1,2} = \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle \right)_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 4 *(Geometrische Interpretation)*

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(U) \subset M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Dann besteht folgende Äquivalenz zwischen der Euklidischen Geometrie auf $\mathbb{R}^2$ und der induzierten Riemannschen Metrik g:

$$\begin{array}{lcc} \textit{Geometrie:} & \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2} & & g = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3} \\[2ex] & f \textit{ konform} & \Longleftrightarrow & f \textit{ winkeltreu} \\ & \Updownarrow & & \\ & f(df_u(v), df_u(w)) & & \\ & = \lambda^2 \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^2} & & \end{array}$$

Die Existenz isothermer Parametrisierungen um jeden Punkt $x \in M^2$ einer Menge $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist notwendig für die Flächeneigenschaft im Sinne von Definition 1, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 11 *Ist $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche gemäß Definition 1, so existiert zu jedem Punkt $x \in M^2$ eine isotherme Parametrisierung $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.*

Beweisidee: 1) Zur Konstruktion der ersten Fundamentalform ist es zulässig, eine *beliebige* Riemannsche Metrik g auf M - d.h. eine punktweise definierte, symmetrische und positiv definite Bilinearform

$$g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$$

zu betrachten. Die Hauptachsentransformation für (T_xM, g_x, II_x) ergibt dann zwei Hauptwerte λ_1, λ_2 in Normalform und definiert die Gaußkrümmung $K(x) = \lambda_1\lambda_2$ für (M, g).

2) Wir nennen (M, g) lokal Euklidisch, falls es eine *isometrische* Parametrisierung $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ von M gibt. Eine Parametrisierung f heißt dabei *isometrisch*, sofern $g_{ij} = g(\partial f/\partial u_i, \partial f/\partial u_j) = \delta_{ij}$ gilt, d.h.

$$g(df_u(v), df_u(w)) = \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow f \text{ ist längentreu.}$$

Nun gilt:

$$K \equiv 0 \Longleftrightarrow (M, g) \text{ ist lokal Euklidisch.} \tag{3}$$

Beispiele: sowohl der Zylinder $Z = S_1 \times \mathbb{R}$, der Kegel, als auch die Tangentialebene $\{\gamma(t) + s\gamma'(t)\}$ haben die Gaußkrümmung $K \equiv 0$ für $g = I = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$. Allgemeiner gilt sogar:

$$(M, g) \text{ mit } K \equiv 0 \Longleftrightarrow (M^2, g) \overset{\text{isome-}\atop\text{trisch}}{=} (\mathbb{R}^2/\Gamma, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2}).$$

3) Sei nun g eine (beliebige) Riemannsche Metrik auf M und $\sigma \in C^\infty(M)$. Dann ist $\tilde{g} = e^{2\sigma} g$ ebenfalls eine Riemannsche Metrik und somit

$$\tilde{K} = e^{-2\sigma} \cdot (K + 2\Delta_g(\sigma)), \tag{4}$$

wobei $\tilde{K}$ eine Art Gaußkrümmung für $\tilde{g}$ beschreibt und Δ_g der Laplace-Operator zu g ist, d.h. $\Delta_g(\sigma) = \operatorname{div}^g \operatorname{grad}^g(\sigma)$.

4) Ist nun g gegeben, so ist auch K bekannt. Sei explizit $g = I$, $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ und K die zugehörige Gaußkrümmung. Dann gilt:

$$\tilde{g} = e^{2\sigma} g \text{ hat } \tilde{K} \equiv 0 \Longleftrightarrow \Delta_g(\sigma) = -\frac{1}{2} K. \tag{5}$$

nach (4). Die PDE-Theorie garantiert nun eine glatte Lösung $\sigma \in C^\infty(M)$ von (5), da Δ_g ein elliptischer Differentialoperator ist.

5) Man nehme nun also $(M^2, g = I)$ und betrachte $\sigma \in C^\infty(M)$ mit $\Delta_g(\sigma) = -\frac{1}{2}K$. Die Metrik $\tilde{g} = e^{2\sigma} g$ hat dann nach 3) die Krümmung $\tilde{K} \equiv 0$. Aus (3) folgt dann, dass $(M, \tilde{g})$ lokal Euklidisch ist, d.h. um jeden Punkt $x \in M$ existiert eine lokale Parametrisierung $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$, d.h.

$$\tilde{g}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right) = e^{2\sigma} g\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right) = e^{2\sigma} g \cdot g_{ij}.$$

Bezüglich der lokalen Parametrisierung $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$(g_{ij}) = e^{-2\sigma} \cdot (\delta_{ij}),$$

d.h. f ist isotherm mit $\lambda = e^{-\sigma}$. □

Beispiel 3 *Wir betrachten die Rotationsfläche* $M_\psi = \{f(u,v) = (\psi(u)\cos v, \psi(u)\sin v, u)\}$ *mit*

$$(g_{ij})(u,v) = \begin{pmatrix} \psi'(u)^2 + 1 & 0 \\ 0 & \psi(u)^2 \end{pmatrix}.$$

Ist $\psi(u) = \cosh(u)$*, so ist* M_ψ *konform parametrisiert. Ist aber* ψ *beliebig, so benötigen wir eine Umparametrisierung der u-Koordinate:*

$$\hat{f}(s,v) = f(\overbrace{\tau(s)}^{=u}, v) \Rightarrow \psi(u) = \psi(\tau(s)) =: \hat{\psi}(s).$$

Nimmt man die Parametrisierung $\hat{f}(s,v) = (\hat{\psi}(s)\cos v, \hat{\psi}(s)\sin v, u)$*, so gilt*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial s}(s,v) = \frac{\partial f}{\partial s}(\tau(s), v) \cdot \tau'(s),$$

also

$$(\hat{g}_{ij})(u,v) = \begin{pmatrix} (\psi'(u)^2 + 1)\tau'(s)^2 & 0 \\ 0 & \psi(u)^2 \end{pmatrix}.$$

◁

Beispiel 4 *Wir betrachten die Wendelfläche* $M = \{f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)\}$ *mit*

$$(g_{ij})(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+1 \end{pmatrix}.$$

Erneut benötigen wir eine Umparametrisierug von M*. Man nehme*

$$\hat{f}(s,v) = (\tau(s)\cos v, \tau(s)\sin v, v)$$

und damit

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial s}(s,v) = (\tau'(s)\cos v, \tau'(s)\sin v, 0), \ \frac{\partial \hat{f}}{\partial v}(s,v) = (-\tau(s)\sin v, \tau(s)\cos v, 1).$$

Damit ist

$$(\hat{g}_{ij})(u,v) = \begin{pmatrix} \tau'(s)^2 & 0 \\ 0 & \tau(s)+1 \end{pmatrix},$$

d.h. wir suchen ein τ*, welches die DGL* $\tau'(s)^2 = \tau^2(s)+1$ *löst:* $\tau(s) = \sinh(s)$ *leistet das Gewünschte und die konforme Parametrisierung ist damit gegeben durch*

$$M = \{(\sinh(s)\cos v, \sinh(s)\sin v, v)\}.$$

◁

Beispiel 5 *Die Enneper-Fläche ist mit*

$$E = \left\{ f(x,y) = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2}, -\frac{y}{2} + \frac{y^3}{6} - \frac{x^2y}{2}, \frac{x^2-y^2}{2} \right) \right\}$$

konform parametrisiert, denn es ist

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{x^2+y^2+x^2y^2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 & 0 \\ 0 & \frac{x^2+y^2+x^2y^2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 \end{pmatrix}.$$

◁

4.2 Minimalflächen und harmonische Funktionen

Der folgende Satz wird zeigen, dass das Bild einer isothermen Parametrisierung f genau dann eine Minimalfläche ist, wenn f harmonisch ist. Wie aus der Funktionentheorie bekannt sein dürfte, ist jede holomorphe Funktion harmonisch. Damit schließt sich der Kreis, denn letztlich wird uns die Frage, wie man sich isotherme und harmonische Parametrisierungen beschafft um Minimalflächen zu konstruieren, auf die holomorphen Funktionen führen.

Satz 12 *Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine isotherme Parametrisierung der Fläche M^2. Dann ist $f(U) \subset M^2$ genau dann eine Minimalfläche, falls*

$$\Delta_{\mathbb{R}^2}(f) \equiv 0,$$

d.h. sofern f eine harmonische Abbildung ist (hierbei ist $\Delta_{\mathbb{R}^2}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 u_2^2}$).
Genauer gilt:

$$\Delta_{\mathbb{R}^2}(f) = 2H\lambda^2 n,$$

wobei H die mittlere Krümmung, n die Normalenabbildung und λ der konforme Faktor mit $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ ist.

Beweis: Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine isotherme Parametrisierung, d.h. $(g_{ij}) = \lambda^2 \delta_{ij}$. Ferner bezeichne (h_{ij}) die Matrix der zweiten Fundamentalform. Dann gilt

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left((g_{ij})^{-1}(h_{ij})\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2}(h_{11} + h_{22}). \tag{6}$$

Wir zeigen nun, dass $\Delta_{\mathbb{R}^2} f$ gemäß Behauptung in Normalenrichtung zeigt, d.h.

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_2}, \frac{\partial f}{\partial u_2} \right\rangle, \tag{7}$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2} \right\rangle = 0. \tag{8}$$

Bildung von $\frac{\partial}{\partial u_1}$ von (7) ergibt

$$2\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} \right\rangle = 2\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} \right\rangle$$

und Bildung von $\frac{\partial}{\partial u_2}$ von (8) ergibt

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial f}{\partial u_2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} \right\rangle = 0$$

Insgesamt folgt:

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}, \frac{\partial f}{\partial u_1} \right\rangle,$$

d.h. $(\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}) \perp \frac{\partial f}{\partial u_1}$. Analog zeigt man $\Delta_{\mathbb{R}^2}(f) \perp \frac{\partial f}{\partial u_2}$. Somit steht $(\Delta f)(u)$ senkrecht auf dem Tangentialraum $T_{f(u)}M$ für alle $u \in U$. Damit hat Δf keinen tangentialen Anteil und es gilt

$$\Delta f = \langle \Delta f, n \rangle n \Longrightarrow \Delta f = \underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}, n \right\rangle}_{h_{11}} n + \underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}, n \right\rangle}_{h_{22}} n = (h_{11} + h_{22})n \overset{(6)}{=} 2H\lambda^2 n.$$

□

Wie bereits eingangs erwähnt, wenden wir uns nun der Frage zu, wie man sich glatte Abbildungen $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, welche zusätzlich isotherm und harmonisch sind, beschaffen kann.

Bemerkung 5

1. *Ist M^2 eine UMF des $\mathbb{R}^3$, so existiert eine lokale Parametrisierung $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Die Forderungen, dass $f : U \longrightarrow f(U)$ bijektiv und ein Homöomorphismus sein soll, können wir im folgenden auch weglassen, wenn wir als Konsequenz auch nicht-globale UMF betrachten.*

2. *Es gilt zudem der folgende Satz: ist $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein reguläres parametrisiertes Flächenstück, d.h. es gelten*

   (a) $f \in C^\infty$,

   (b) $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u), \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$ *sind linear unabhängig für alle* $u \in U$,

   so ex. um jeden Punkt $x \in M := f(U)$ ein Parameter $u_0 \in U$ mit $f(u_0) = x$ und eine Umgebung $V(u_0) \subset U$, sodass $f(V(u_0)) \subset M$ eine UMF ist.

Wie kann man nun $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ansehen, dass diese regulär und konform ist?

Definition 13 *Zu $F_f : U \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \in U$, definiere*

$$F_f(z) := \frac{\partial f}{\partial u_1}(z) - i\frac{\partial f}{\partial u_2}(z).$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

- $\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}^3} := \sum_{j=1}^3 z_j \overline{w_j}$,
- $z \cdot w := \sum_{j=1}^3 z_j w_j$, *für* $z, w \in \mathbb{C}$.
- *Für* $z = x + iy \in \mathbb{C}^3$ *schreibe:*
  $\langle z, z \rangle_{\mathbb{C}^3} := \langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^3} + \langle y, y \rangle_{\mathbb{R}^3}$,
- $z \cdot z := \langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^3} + \langle y, y \rangle_{\mathbb{R}^3} + 2i \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^3}$.

Folgerung 4 *Es gilt:*

$$\langle F_f, F_f \rangle = g_{11} + g_{22}, \quad F_f \cdot F_f = g_{11} - g_{22} - 2ig_{12},$$

d.h. f ist genau dann konform, wenn $F_f \cdot F_f = 0$ gilt. Des Weiteren ist f genau dann konform ***und*** *regulär, falls $\langle F_f, F_f \rangle > 0$.*

4.3 Minimalflächen und holomorphe Funktionen

Wir werden nun einen der zentralen Sätze dieses Kompaktkurses formulieren und beweisen, mit welchem sich Minimalflächen aus holomorphen Funktionen explizit konstruieren lassen. Hierzu werden wir holomorphe Funktionen auf einfach-zusammenhängenden Gebieten mit den beiden Eigenschaften aus Folgerung 4 betrachten.

Satz 13

1. *Sei* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *eine isotherme Parametrisierung der Minimalfläche* $f(U)$. *Dann ist* $F_f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^3$ *holomorph (d.h. holomorph in jeder Komponente) und es gilt*
   - $\langle F_f, F_f \rangle > 0$,
   - $F_f \cdot F_f = 0$.

2. *Ist andererseits* $U \subset \mathbb{C}$ *einfach-zusammenhängend (d.h.* U *hat eine triviale Fundamentalgruppe) und* $F : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^3$ *holomorph mit* $\langle F, F \rangle > 0$ *und* $F \cdot F = 0$, *dann ist*

$$f(z) := \Re e \underbrace{\left(\int_{z_0}^{z} F(\xi) d\xi \right)}_{\textit{Stammfkt. von } F}$$

   eine Minimalfläche in isothermer Parametrisierung. Das Integral $\int_{z_0}^{z} F(\xi)d\xi$ *bezeichnet hierbei das Kurvenintegral von* F *entlang eines beliebigen Weges von* z_0 *nach* z *in* U.

Beweis:
1) Sei durch $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Minimalfläche in isothermen Koordinaten gegeben. Wir zeigen zuerst, dass $F_f \overset{\text{Def}}{=} \frac{\partial f}{\partial u_1} - i \frac{\partial f}{\partial u_2} : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^3$ holomorph ist. Hierzu genügt es zu zeigen, dass F_f die Cauchy-Riemannschen DGL (CR-DGL) erfüllt, denn es gilt bereits $f \in C^1$; d.h. wir zeigen

$$\text{(CR-DGL)} \qquad \frac{\partial F_f}{\partial u_1} = -i \frac{\partial F_f}{\partial u_2}.$$

Es gilt:

$$\frac{\partial F_f}{\partial u_1} + i \frac{\partial F_f}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} - i \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} + i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1} - i \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} \right) = \Delta(f) \equiv 0,$$

denn f ist harmonisch nach Satz 12.

2) Sei U einfach-zusammmenhängend und $F : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^3$ holomorph mit

$$f(z) = \Re e \underbrace{\left(\int_{z_0}^{z} F(\xi) d\xi \right)}_{=:\Phi(z)}.$$

und $\langle F, F \rangle > 0$, $F \cdot F = 0$. Dann gilt $\Phi'(z) = F(z)$ und

$$\begin{aligned}
\Phi'(z) &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(z) = -i \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}(z), \\
\Phi'(z) &= \frac{\partial \Re e(\Phi)}{\partial u_1}(z) + i \frac{\partial \Im m(\Phi)}{\partial u_1}(z) \overset{\text{CR-DGL}}{=} \frac{\partial \Re e(\Phi)}{\partial u_1}(z) - i \frac{\partial \Re e(\Phi)}{\partial u_2}(z).
\end{aligned}$$

Setze $f := \Re e(\Phi)$. Dann gilt: $F = F_f$ und da $\langle F, F \rangle > 0$ und $F \cdot F = 0$, ist f eine reguläre Fläche in isothermen Koordinaten. Es bleibt unter Nutzung von Satz 12 zu zeigen, dass $\Delta(f) \equiv 0$: die CR-DGL besagen nämlich

$$\frac{\partial \Re e(F)}{\partial u_1} = \frac{\partial \Im m(F)}{\partial u_2}$$

und aus $F = F_f = \frac{\partial f}{\partial u_1}(z) - i\frac{\partial f}{\partial u_2}(z)$ folgt sodann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} \Longrightarrow \Delta(f) \equiv 0.$$

□

Im folgenden wollen wir nun derartige holomorphe Funktionen

$$F : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^3$$

mit $FF = 0$ und $\langle F, F \rangle > 0$ finden.

Bemerkung 6

1. *Die Funktion $F = (F_1, -iF_1, 0)$ liefert ebene Flächen, weshalb wir diese Darstellung o.B.d.A. ausschließen wollen.*
2. *Seien $H, G : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $G \not\equiv 0$. Dann hat*

$$\frac{H}{G} : U \setminus \{z \in U : \; G(z) = 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

nur isolierte Singularitäten, die entweder Polstellen oder hebbar sind, da die Nullstellen von G isoliert sind.

Satz 14
Jede holomorphe Funktion $F : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^3$ mit $FF = 0$ und $F \neq (F_1, -iF_1, 0)$ hat die Form

$$F = F_{h_1 h_2} = \left(\frac{1}{2} h_1(1 - h_2^2), \; \frac{1}{2} i h_1(1 + h_2^2), \; h_1 h_2 \right),$$

wobei $h_1 : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist und $h_2 : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ derart meromorph ist, dass die Funktion h_1 für jede Polstelle z von h_2 der Ordnung k eine Nullstelle der Ordnung größer oder gleich $2k$ hat.

Beweis: Sei $F = (F_1, F_2, F_3)$ mit $FF = 0$ und $F_3 \neq 0$. Definiere

$$\begin{aligned} h_1 &:= F_1 - iF_2 \neq 0, \\ h_2 &:= \frac{F_3}{F_1 - iF_2} = \frac{F_3}{h_1}. \end{aligned}$$

Damit ist h_1 holomorph, sowie h_2 meromorph. Offensichtlich gilt $F_3 = h_2 \cdot h_1$. Zudem gilt:

$$(F_1 - iF_2)(F_1 + iF_2) = F_1^2 + F_2^2 \overset{FF=0}{=} -F_3^2 = -h_1^2 h_2^2.$$

Wegen $(F_1 + iF_2) = -h_1 h_2^2$ und $(F_1 - iF_2) = h_1$ folgt schließlich

$$F_1 = \frac{1}{2}(h_1 - h_1 h_2^2), \quad iF_2 = \frac{1}{2}(-h_1 h_2^2 - h_1).$$

□

Folgerung 5 *Sei U einfach-zusammenhängend. Nimmt man beliebige Funktionen*

$$\begin{aligned} h_1 &: U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}, \\ h_2 &: U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ meromorph}, \end{aligned}$$

mit

$$z \text{ Pol von } h_2 \text{ der Ordnung } k \Longrightarrow z \text{ Nullstelle von } h_1 \text{ der Ordnung mindestens } 2k,$$

so erhält man stets eine Minimalfläche mittels der Parametrisierung

$$f_{h_1 h_2}(z) = \left.\begin{pmatrix} \Re e \left(\int\limits_{z_0}^{z} \left(\frac{1}{2} h_1 (1 - h_2^2) \right)(\xi) d\xi \right) \\ \Re e \left(\int\limits_{z_0}^{z} \left(\frac{1}{2} i h_1 (1 + h_2^2) \right)(\xi) d\xi \right) \\ \Re e \left(\int\limits_{z_0}^{z} (h_1 h_2)(\xi) d\xi \right) \end{pmatrix}\right\} \frac{\textit{Weierstraß-Darstellung}}{\textit{der Minimalfläche.}}$$

Insbesondere erhält man jede Minimalfläche (lokal) durch eine solche Parametrisierung.

4.4 Assoziierte Familien von Minimalflächen, konjugierte Minimalflächen

Sei $F : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^3$ holomorph, $FF = 0$ und $\langle F, F \rangle > 0$. Für alle $\theta \in [0, 2\pi]$ gilt dann $F_\theta = e^{i\theta} \cdot F$. Nun gilt

$$\langle F_\theta, F_\theta \rangle = |e^{i\theta}|^2 \langle F, F \rangle > 0, \quad F_\theta F_\theta = e^{2i\theta} FF = 0$$

und

$$\begin{aligned} f_\theta(z) &:= \Re e \left(\int_{z_0}^{z} e^{i\theta} F(\xi) d\xi \right) = \Re e \left((\cos\theta + i \sin\theta) \cdot \int_{z_0}^{z} F(\xi) d\xi \right) \\ &= \cos\theta \cdot \underbrace{\Re e \left(\int_{z_0}^{z} F(\xi) d\xi \right)}_{f_F(z)} - \sin\theta \cdot \underbrace{\Im m \left(\int_{z_0}^{z} F(\xi) d\xi \right)}_{f_F^*(z)} . \end{aligned} \tag{9}$$

Definition 14 *Es gelten die Bezeichnungen aus Gleichung (9): sei $f := f_0$ und $f^* = f_{\frac{\pi}{2}}$. f_θ heißt assoziierte Familie zu f von Minimalflächen; f^* ist die zu f konjugierte Minimalfläche.*

5 Aufgaben

5.1 Aufgaben zum Abschnitt 2 und 3

Man beweise die folgenden Aussagen.

1. Satz 7
2. Satz 8.
3. Es kann keine kompakte Minimalfläche geben.
4. Das Katenoid und die Wendelfläche sind Minimalflächen.
5. Das Katenoid ist die einzige Minimalfläche unter den Rotationsflächen.
6. Die Scherksche Fläche $M^2 = \mathrm{graph}(\varphi)$ mit

   $$\varphi(x,y) = \ln\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right), \ (x,y) \in (0,\pi/2) \times (0,\pi/2)$$

   ist eine Minimalfläche.

5.2 Aufgaben zum Abschnitt 4

1. Sind das Katenoid und die Wendelfläche isometrisch?
2. Sind konjugierte Minimalflächen isometrisch?
3. Man zeige: Die Enneper-Fläche ist eine Minimalfläche.
4. Was ist die Weierstraß-Darstellung zum Katenoid und zur Wendelfläche?
5. Man zeige: die Wendelfläche ist die zum Katenoid konjugierte Minimalfläche.
6. Man ermittle die Weierstraß-Darstellung der Enneper-Fläche.
7. Man ermittle die Weierstraß-Darstellung der Scherkschen Fläche.