

Kapitel 10

Differential- und Integralrechnung auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N

Dozentin: Prof. Dr. Helga Baum

Nach Vorlesungen

- im Sommersemester 2002 (2. Teil von Analysis IV)
- im Wintersemester 2007/08 (1. Teil von Analysis IIIa)
- im Wintersemester 2012/13 (Teil von Analysis 3)

Letzte Korrekturen und Ergänzungen: 26.02.2013 (Helga Baum)

Inhaltsverzeichnis

10 Differential- und Integralrechnung auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N	1
10.1 Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N	4
10.1.1 Untermannigfaltigkeiten ohne Rand	4
10.1.2 Untermannigfaltigkeiten mit Rand	11
10.2 Tangential- und Normalenräume an Untermannigfaltigkeiten	13
10.3 Differenzierbare Abbildungen und ihr Differential	15
10.4 Kanonische Basen und Kobasen	18
10.5 Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten	21
10.6 Orientierbare und nichtorientierbare Untermannigfaltigkeiten	25
10.7 Die induzierte Riemannsche Metrik einer Untermannigfaltigkeit	28
10.8 Gradient, Divergenz und Laplace–Operator auf Untermannigfaltigkeiten	29
10.9 Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten	36
10.9.1 Algebraische Vorbereitungen	36
10.9.2 Differentialformen und der Lokalisierungssatz	37
10.9.3 Rechenoperationen für Differentialformen	40
10.9.4 Geschlossene und exakte Differentialformen	44
10.9.5 Die Volumenform einer orientierten Untermannigfaltigkeit	49
10.10 Integration von Differentialformen	54
10.10.1 Meßbare Teilmengen von Untermannigfaltigkeiten	54
10.10.2 Definition des Integrals	54
10.10.3 Eigenschaften und Berechnung des Integrals	58
10.10.4 Das Lebesgue-Maß auf Untermannigfaltigkeiten, das Volumen von Teilmengen und das Oberflächenintegral	62
10.11 Der Satz von Stokes	64
10.11.1 Der Satz von Stokes für Differentialformen	64
10.11.2 Der Gaußsche Integralsatz und die Greenschen Formeln	67
10.11.3 Klassische Integralsätze im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	69
10.11.4 Drei typische Anwendungen des Satzes von Stokes	75
10.12 Wiederholungsfragen zur Prüfungsvorbereitung	78
10.13 Weitere Literatur zur Vorlesung	79
10.14 Übungsaufgaben	80

Bisher haben wir in der Analysis-Ausbildung behandelt, wie man Abbildungen differenziert und integriert, die auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n definiert sind. Für viele Bereiche der Mathematik und für viele Anwendungen z.B. in der mathematischen Physik reicht das nicht aus. Als mathematische Modelle treten oft Mengen auf, die nicht *global* durch n reelle Koordinaten zu beschreiben sind, sondern nur *lokal* in der Nähe jedes Punktes. Solche Mengen nennt man lokal Euklidische Räume bzw. Mannigfaltigkeiten, falls noch zusätzliche "gute" Eigenschaften für die Übergänge von einem Koordinatensystem zu einem anderen erfüllt sind. Als Beispiele für solche Objekte kann man sich gekrümmte Flächen, die durch den Graph einer Funktion entstehen oder die Oberfläche eines Rotationskörpers vorstellen. In dem letzten Kapitel des Grundkurses zur Analysis soll die Differential- und Integralrechnung auf solchen Mannigfaltigkeiten erklärt werden. Das wesentliche Ziel des Kapitels ist der Beweis des Satzes von Stokes für Differentialformen, der einen Zusammenhang zwischen Integralen über einer Menge M und Integralen über den Rand von M herstellt, wie wir ihn in Spezialfällen z.B. bereits aus der Funktionentheorie kennen. Der Satz von Stokes hat vielfältige Anwendungen in der Geometrie, Analysis und mathematischen Physik, die in den Vorlesungen des Hauptstudiums behandelt werden.

Wir betrachten in dieser Vorlesung entsprechend dem Studienplan nur den Fall, dass die Mannigfaltigkeit als Teilmenge eines reellen Raumes \mathbb{R}^N gegeben ist. Man spricht dann von den sogenannten Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N . Diese Einschränkung wäre nicht nötig, hat aber den Vorteil, dass man sich die Konzepte und Objekte zumindest für den Fall von Flächen im \mathbb{R}^3 gut anschaulich vorstellen kann. Ich werde hier alle Begriffe so einführen, dass sie bei geeigneter Definition des Tangentialraumes wörtlich auf den Fall von abstrakten Mannigfaltigkeiten übertragbar sind.

Als Vorbemerkung erinnern wir an einige Begriffe und Bezeichnungen aus der Differentialrechnung von Funktionen mehrerer reeller Variablen (siehe Kapitel 6).

Es sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung von einer offenen Menge des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m . Das Differential $DF_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dieser Abbildung im Punkt $x \in U$ ist eine lineare Abbildung, deren Wert auf einem Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ durch die Ableitung von F entlang der Geraden durch x in Richtung \mathbf{a} gegeben ist

$$DF_x(\mathbf{a}) = \left. \frac{d}{dt} (F(x + t\mathbf{a})) \right|_{t=0}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Wendet man das Differential DF_x auf den i . kanonischen Basisvektor e_i des \mathbb{R}^n an (e_i hat in der i . Komponente eine 1, alle anderen Komponenten sind Null), so erhält man die partielle Ableitung von F nach der i . Koordinate

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = DF_x(e_i).$$

In diesem Kapitel werden wir alle linearen Abbildungen mit den ihnen bezüglich der kanonischen Basen entsprechenden Matrizen identifizieren. Wir identifizieren also das Differential DF_x der Abbildung $F = (F_1, \dots, F_m)$ im Punkt $x \in U$ mit der Jacobi-Matrix von F im Punkt x

$$DF_x \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Existieren alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

der Ordnung k und sind auf U stetig, so nennt man F k -fach stetig differenzierbar oder von der Klasse C^k . Die Menge dieser C^k -Abbildungen wird mit $C^k(U, \mathbb{R}^m)$ bezeichnet. Ist F eine C^k -Abbildung für jedes $k \geq 1$, so nennt man F eine glatte Abbildung oder von der Klasse C^∞ .

Eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus der Klasse C^k von U auf V , falls $F : U \longrightarrow V$ bijektiv und F und F^{-1} k -fach stetig differenzierbar sind.

Ist $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $x \in U$, so ist das Differential $DF_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus. Andererseits gilt der Satz über den lokalen Diffeomorphismus: Ist $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k -Abbildung ($1 \leq k \leq \infty$), $x \in U$ und das Differential $DF_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, so ist F ein lokaler Diffeomorphismus um x , d.h. es existiert eine offene Umgebung $W \subset U$ von x und eine offene Umgebung $\widetilde{W} \subset V$ von $F(x)$, so dass $F|_W : W \longrightarrow \widetilde{W}$ ein C^k -Diffeomorphismus ist.

10.1 Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N

Zuerst definieren die Grundobjekte der Betrachtungen dieses Kapitels, die Untermannigfaltigkeiten.

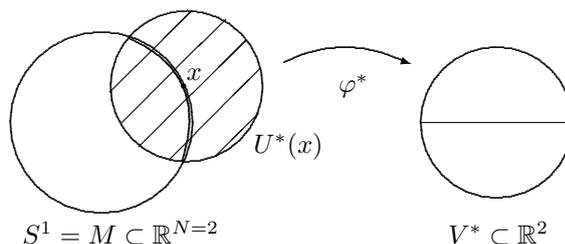
10.1.1 Untermannigfaltigkeiten ohne Rand

Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N , falls es um jeden Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $U^* \subset \mathbb{R}^N$ und einen Diffeomorphismus $\varphi^* : U^* \longrightarrow V^*$ von U^* auf eine offene Teilmenge $V^* \subset \mathbb{R}^N$ gibt, so daß

$$\varphi^*(U^* \cap M) = \{y \in V^* \mid y_{n+1} = \dots = y_N = 0\} = V^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{o\}).$$

gilt.

(o bezeichnet dabei den Nullvektor im Teilraum \mathbb{R}^{N-n} .)



Bemerkung: Sind alle Diffeomorphismen φ^* aus der Definition der Untermannigfaltigkeit von der Klasse C^k , $1 \leq k \leq \infty$, so nennt man die Untermannigfaltigkeit "von der Klasse C^k ". In dieser Vorlesung beschränken wir uns (in der Regel) auf den Fall, dass die Diffeomorphismen φ^* von der Klasse C^∞ sind und lassen die Angabe der Klasse weg.

Den Diffeomorphismus φ^* kann man sich als "Glattbügeln" des "krummen Teils" $M \cap U^*$ von U^* vorstellen (siehe Bild).

Wir identifizieren im folgenden den Unterraum $\mathbb{R}^n \times \{o\} \subset \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ mit dem

\mathbb{R}^n . Alle Teilmengen reeller Räume verstehen wir mit der durch die Euklidische Metrik induzierten Topologie. Ist $\varphi^* : U^* \rightarrow V^*$ ein Diffeomorphismus wie in der Definition der Untermannigfaltigkeit, so gilt

1. $U := U^* \cap M$ ist eine offene Teilmenge von M bezüglich der auf M induzierten Topologie,
2. $V := V^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{o\}) \subset \mathbb{R}^n$ ist im \mathbb{R}^n offen,
3. $\varphi := \varphi^*|_U : U \rightarrow V$ ist ein Homöomorphismus zwischen U und V .
Durch φ werden jedem Punkt der Teilmenge $U \subset M$ eindeutig n reelle Koordinaten zugeordnet.

Definition. Sei $\varphi^* : U^* \rightarrow V^*$ ein Diffeomorphismus wie in der Definition der Untermannigfaltigkeit. Dann heißt $(U := U^* \cap M, \varphi := \varphi^*|_U)$ Karte von M um $x \in M$. Eine Überdeckung von M durch Karten, d.h. eine Familie $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, wobei $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ Karten sind und $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ gilt, nennt man Atlas von M .

Satz 10.1 Seien (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) zwei Karten der Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^N$ um den Punkt $x \in M$. Dann ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung zwischen offenen Mengen des \mathbb{R}^n .

Beweis: Gemäß Definition ist $U_1 = U_1^* \cap M$, $U_2 = U_2^* \cap M$, $\varphi_1 = \varphi_1^*|_{U_1}$ und $\varphi_2 = \varphi_2^*|_{U_2}$, wobei $\varphi_1^* : U_1^* \rightarrow V_1^*$ und $\varphi_2^* : U_2^* \rightarrow V_2^*$ Diffeomorphismen zwischen offenen Mengen des \mathbb{R}^N sind. Die Abbildung $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ ist die Einschränkung des Diffeomorphismus

$$\varphi_2^* \circ \varphi_1^{*-1} : \varphi_1^*(U_1^* \cap U_2^*) \rightarrow \varphi_2^*(U_1^* \cap U_2^*)$$

auf den Teilraum \mathbb{R}^n des \mathbb{R}^N und somit ebenfalls ein Diffeomorphismus. □

Die Abbildung $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ heißt *Koordinatentransformation* oder *Kartenübergang* zwischen den Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) .

Offensichtlich ist jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^N$ eine N -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N . Als Atlas kann man denjenigen nehmen, der nur aus der durch die Euklidischen Koordinaten gegebenen Karte besteht: $\mathcal{A} = \{(U, \varphi(x) = (x_1, \dots, x_N))\}$.

Um zu entscheiden, ob eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit ist, muss man einen Atlas für diese Menge angeben. In der Regel wird ein solcher Atlas natürlich aus mehreren Karten bestehen. In vielen Fällen hat man noch andere Möglichkeiten zu überprüfen, ob eine Menge M eine Untermannigfaltigkeit ist. Wir wollen als nächstes ein Kriterium kennenlernen, mit dem man entscheiden kann, ob durch Gleichungen definierte Teilmengen des \mathbb{R}^N Untermannigfaltigkeiten sind.

Satz 10.2 (Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten durch Gleichungen)
Sei $W \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Teilmenge, $n \leq N$ und $F : W \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ eine glatte Abbildung. Wir bezeichnen mit $M := \{x \in W \mid F(x) = o\}$ die Nullstellenmenge der Abbildung F . Dann gilt:

Ist der Rang der Jacobimatrix DF_x von F in jedem Punkt $x \in M$ maximal, d.h. $N - n$, so ist die Menge $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N .

Beweis: Als erstes bringen wir die Abbildung F durch eine Koordinatentransformation im \mathbb{R}^N auf eine einfache Gestalt. Wir werden zeigen, dass es um jeden Punkt $y \in M$ eine offene Umgebung $U^* \subset \mathbb{R}^N$ und einen Diffeomorphismus $\varphi^* : U^* \rightarrow V^*$ auf eine offene Menge $V^* \subset \mathbb{R}^N$ gibt, so dass

$$(i) \quad \varphi^*(y) = 0 \quad \text{und}$$

$$(ii) \quad F((\varphi^*)^{-1}(x_1, \dots, x_N)) = (x_{n+1}, \dots, x_N)$$

gilt:

Da der Rang der Jacobimatrix DF_y von F im Punkt y nach Voraussetzung $N - n$ ist, können wir (evt. nach einer Permutation der Koordinaten im \mathbb{R}^N) annehmen, dass die letzten $N - n$ Spalten von DF_y linear unabhängig sind. Zur Abkürzung bezeichnen wir diese letzten Spalten mit B_y , d.h.

$$B_y := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}(y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(y) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{N-n}}{\partial x_{n+1}}(y) & \cdots & \frac{\partial F_{N-n}}{\partial x_N}(y) \end{pmatrix}.$$

Sei G die glatte Abbildung

$$G : W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_N) \mapsto (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n, F_1(x), \dots, F_{N-n}(x)).$$

Dann gilt $G(y) = 0$ und die Berechnung der Jacobideterminante ergibt

$$\det(DG_y) = \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ * & B_y \end{pmatrix} = \det B_y.$$

Da die letzten $N - n$ Spalten von DF_x linear unabhängig sind, ist B_y invertierbar, also $\det(DG_y) = \det B_y \neq 0$. Wir können somit den Satz über den lokalen Diffeomorphismus anwenden, der die Existenz einer offenen Umgebung $U^* \subset \mathbb{R}^N$ von y und einer offenen Umgebung $V^* \subset \mathbb{R}^N$ von 0 garantiert, so daß $\varphi^* := G|_{U^*} : U^* \rightarrow V^*$ ein Diffeomorphismus ist. Dann folgt (i) wegen $\varphi^*(y) = G(y) = 0$. Nach Definition von G gilt

$$G((\varphi^*)^{-1}(x)) = ((\varphi^*)^{-1}(x)_1 - y_1, \dots, (\varphi^*)^{-1}(x)_n - y_n, F_1((\varphi^*)^{-1}(x)), \dots, F_{N-n}((\varphi^*)^{-1}(x))). \quad (+)$$

Es gilt außerdem $G|_{U^*} = \varphi^*$, also $G((\varphi^*)^{-1}(x)) = x$ für jedes $x \in V^*$. Setzt man dies in (+) ein, so folgt $F((\varphi^*)^{-1}(x_1, \dots, x_N)) = (x_{n+1}, \dots, x_N)$, womit die Behauptung (ii) bewiesen ist.

Wir zeigen nun, dass der Diffeomorphismus $\varphi^* : U^* \rightarrow V^*$ eine Karte um $y \in U^*$ definiert. Nach Konstruktion von φ^* folgt

$$\begin{aligned} \varphi^*(U^* \cap M) &= \varphi^*(U^* \cap \{w \in W \mid F(w) = o\}) = \varphi^*(U^*) \cap \{v \in V^* \mid F((\varphi^*)^{-1}(v)) = o\} \\ &= V^* \cap \{v_{n+1} = \dots = v_N = 0\} = V^* \cap \{\mathbb{R}^n \times \{o\}\}. \end{aligned}$$

Folglich ist $(U, \varphi) := (U^* \cap M, \varphi^*|_{U^* \cap M})$ eine Karte um $y \in M$. □

Beispiele für gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten

Beispiel 1: Die Sphäre.

Wir betrachten die Sphäre vom Radius r im \mathbb{R}^{n+1}

$$S_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$$

S_r^n ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} . Um dies zu zeigen, betrachten wir die glatte Abbildung

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|^2 - r^2.$$

Offensichtlich gilt $S_r^n = F^{-1}(0)$. Für die Jacobimatrix von F in x gilt $DF_x = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) = 2x$. Für $x \in S_r^n$ ist $rg(DF_x) = 1$. Somit ist S_r^n nach Satz 10.2 eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} . \square

Beispiel 2: Der Graph einer Abbildung.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Wir betrachten den Graphen der Abbildung h

$$M := \text{graph}(h) = \{(x, h(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

M läßt sich als Nullstellenmenge der folgenden Abbildung F darstellen:

$$F : U \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) \mapsto h(x) - y,$$

Offensichtlich ist $M = F^{-1}(0)$ und für die Jacobimatrix gilt

$$DF_{(x,y)} = \left(\begin{array}{c|ccc} & -1 & & \\ \star & & \ddots & \\ & & & -1 \end{array} \right),$$

(mit $n+m$ Spalten und m Zeilen). Da $rg(DF_{(x,y)}) = m$, ist M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+m} . \square

Beispiel 3: Der Rotationstor.

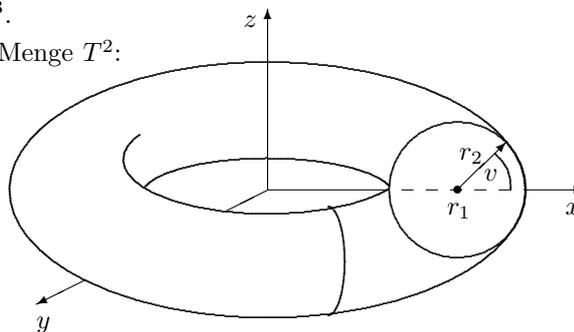
Wir betrachten den Rotationstor im \mathbb{R}^3 .

Dies ist die auf folgende Weise definierte Menge T^2 :

Es sei ein Kreis in der (x, z) -Ebene um $(r_1, 0)$ mit Radius r_2 gegeben, wobei $0 < r_2 < r_1$. Sei T^2 die Punktmenge im \mathbb{R}^3 , die bei Drehung dieses Kreises um die z -Achse entsteht.

T^2 heißt *Rotationstor*.

Wir zeigen daß



$$T^2 = \{((r_1 + r_2 \cos v) \cos u, (r_1 + r_2 \cos v) \sin u, r_2 \sin v) \mid u, v \in \mathbb{R}\} :$$

Der Kreis in der (x, z) -Ebene wird durch $\gamma(v) := (r_1 + r_2 \cos v, r_2 \sin v)$ parametrisiert. Bei Drehung um die z -Achse bleibt die z -Koordinate unverändert. Vom Nullpunkt verschiedene Punkte in der (x, y) -Ebene werden durch Polarkoordinaten in der Form

$pe^{iu} = p(\cos u + i \sin u) = (p \cos u, p \sin u)$ beschrieben, wobei $p \in \mathbb{R}^+$ den Abstand vom Nullpunkt und u den Winkel zur x -Achse beschreibt. Folglich gilt für die Koordinaten eines Punktes des Rotationstoruses

$$x = (r_1 + r_2 \cos v) \cos u, \quad y = (r_1 + r_2 \cos v) \sin u, \quad \text{bzw. } z = r_2 \sin v. \quad (*)$$

Wir zeigen nun, daß T^2 eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ist. Aus (*) folgt $x^2 + y^2 = (r_1 + r_2 \cos v)^2$, also

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1\right)^2 = r_2^2 \cos^2 v = r_2^2(1 - \sin^2 v) = r_2^2 - z^2.$$

Somit gilt

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - r_1)^2 + z^2 - r_2^2 = 0\}.$$

Sei nun die Abbildung F definiert durch

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - r_1)^2 + z^2 - r_2^2,$$

dann gilt $T^2 = F^{-1}(0)$. Außerdem ist

$$DF_{(x,y,z)} = \left(\frac{2(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1) \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right)$$

und es gilt $DF_{(x,y,z)} \neq (0, 0, 0)$ für alle $(x, y, z) \in T^2$. Nach Satz 10.2 ist T^2 eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . \square

Wir haben den 2-dimensionalen Rotationstor T^2 im Beispiel 3 durch zwei Parameter u und v beschrieben. Wir betrachten nun Mengen im \mathbb{R}^N , die durch n Parameter beschrieben sind und untersuchen, unter welchen Bedingungen an die Parametrisierung solche Mengen Untermannigfaltigkeiten sind. Dies gibt uns ein weiteres Kriterium um zu entscheiden, ob gewisse Mengen Untermannigfaltigkeiten sind.

Definition. Sei M eine Teilmenge des \mathbb{R}^N . Eine lokale Parametrisierung von M um den Punkt $p \in M$ durch n Parameter ist eine glatte Abbildung $\Phi : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ von einer offenen Teilmenge W des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^N mit den folgenden Eigenschaften:

1. $p \in \Phi(W) \subset M$.
2. Φ ist injektiv.
3. Die Vektoren $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(w), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(w)$ des \mathbb{R}^N sind linear unabhängig für alle $w \in W$ (d.h. die Jacobimatrix $D\Phi_w$ hat den Rang n für alle $w \in W$).
4. $\Phi(W)$ ist offen in M , d.h. es existiert eine offene Menge $U^* \subset \mathbb{R}^N$ mit $\Phi(W) = U^* \cap M$ und die Abbildung $\Phi^{-1} : \Phi(W) \longrightarrow W$ ist stetig.

Beispiele:

1. Ist $\varphi : U \longrightarrow V$ eine Karte einer Untermannigfaltigkeit M um $x \in M$, so ist

$$\Phi := \varphi^{-1} : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^N$$

eine lokale Parametrisierung von M um x .

2. Sei $W = (u_0 - \pi, u_0 + \pi) \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi) \subset \mathbb{R}^2$ und $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$\Phi(u, v) := ((r_1 + r_2 \cos v) \cos u, (r_1 + r_2 \cos v) \sin u, r_2 \sin v), \quad (u, v) \in W.$$

Dann ist Φ eine lokale Parametrisierung von T^2 um den Punkt $\Phi(u_0, v_0)$.

Satz 10.3 Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten durch lokale Parametrisierungen

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$. Um jeden Punkt $x \in M$ existiere eine lokale Parametrisierung von M durch n Parameter. Dann ist M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N .

Beweis: Sei $x \in M$ und sei die Abbildung $\Phi : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine lokale Parametrisierung um x . Unser Ziel ist es, aus Φ eine Karte um x zu konstruieren. Für den Rang der Jacobimatrix von Φ gilt $\text{rg} D\Phi_w = n$ für jeden Punkt $w \in W$. OBdA können wir annehmen, daß die ersten n Zeilen dieser Matrix linear unabhängig sind. (Dies erreicht man durch Umordnen der Koordinaten und evt. durch verkleinern von W). Es gilt also

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(w) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(w) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(w) & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(w) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (*)$$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$G : W \times \mathbb{R}^{N-n} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \\ (a, b) \mapsto \Phi(a) + (o, b) = (\Phi_1(a), \dots, \Phi_n(a), b_1, \dots, b_{N-n}).$$

Dann gilt

$$\det DG_{(a,b)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(a) & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(a) & & \\ & & \star & & I_{N-n} \end{pmatrix}.$$

Mit (*) folgt daher $\det DG_{(a,b)} \neq 0$ für jedes $(a, b) \in W \times \mathbb{R}^{N-n}$. Sei nun $w_0 \in W$ das Urbild von x : $\Phi(w_0) = x$. Dann ist $G(w_0, o) = x$. Nach dem Satz über lokale Diffeomorphismen existiert eine offene Umgebung $V_1 \subset \mathbb{R}^N$ von (w_0, o) und eine offene Umgebung $V_2 \subset \mathbb{R}^N$ von x , so daß $G|_{V_1} : V_1 \rightarrow V_2$ ein Diffeomorphismus ist. Nach Definition der Parametrisierung ist die Abbildung $\Phi^{-1} : \Phi(W) \rightarrow W$ stetig und bijektiv. Folglich sind Bilder offener Mengen unter $\Phi : W \rightarrow \Phi(W)$ offen. Also muß die Menge $\{\Phi(a) \mid (a, o) \in V_1\} = \Phi(V_1 \cap (W \times \{o\}))$ offen in $\Phi(W)$ bezüglich der durch \mathbb{R}^N induzierten Topologie sein. Dies bedeutet, daß eine offene Menge $O \subset \mathbb{R}^N$ mit $\{\Phi(a) \mid (a, o) \in V_1\} = O \cap \Phi(W)$ existiert. Wir setzen nun $V_2^* := V_2 \cap O$ und $V_1^* := G^{-1}(V_2^*)$ und bezeichnen die Restriktion $G^{-1}|_{V_2^*} : V_2^* \rightarrow V_1^*$ mit φ^* . Wir behaupten, daß φ^* eine Karte der Untermannigfaltigkeit um $x \in M$ definiert. φ^* ist natürlich ein Diffeomorphismus und es gilt

$$V_2^* \cap M = M \cap V_2 \cap O = \{\Phi(a) \mid (a, o) \in V_1^*\} = \{G(a, o) \mid (a, o) \in V_1^*\} = G(V_1^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{o\})),$$

aufgrund der Definition von G . Also folgt $\varphi^*(V_2^* \cap M) = V_1^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{o\})$. \square

Beispiel: Das Katenoid

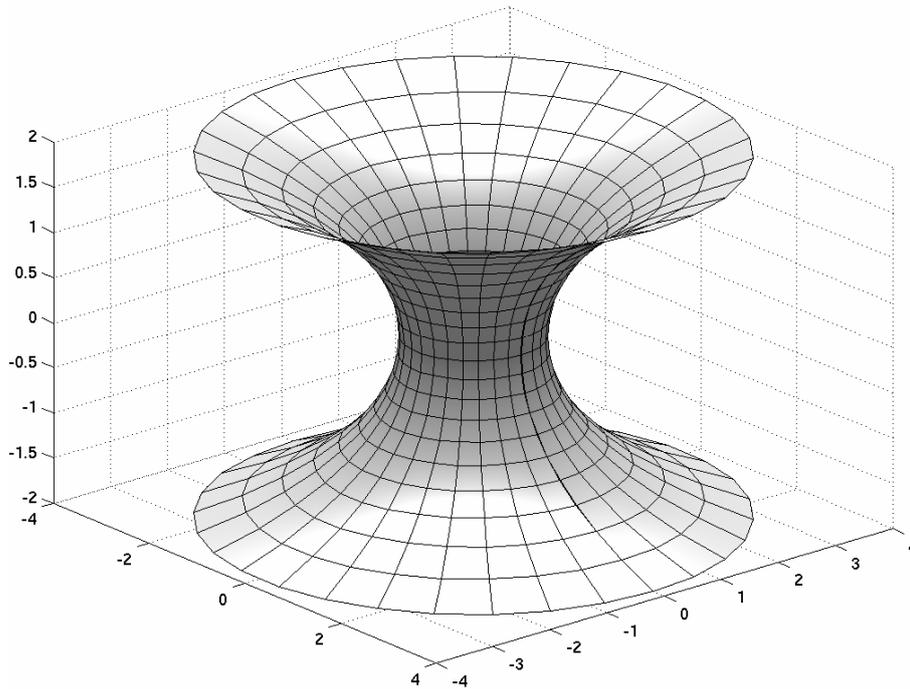
Das Katenoid ist die Fläche, die entsteht, wenn man die Kettenlinie um die z -Achse dreht. Sie wird beschrieben durch

$$M^2 := \{ \Phi(u, z) = (\cosh z \cos u, \cosh z \sin u, z) \mid (u, z) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Das Katenoid M^2 ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 , denn

$$\Phi : (u, z) \in (u_0 - \pi, u_0 + \pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \Phi(u, z) \in M$$

ist eine lokale Parametrisierung um den Punkt $\Phi(u_0, z_0) \in M$ für jedes $(u_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ (Übungsaufgabe 10.3).



Beispiel: Die Wendelfläche

Die Wendelfläche ist die folgende Punktmenge

$$F^2 = \{ \Phi(u, v) := (v \cos u, v \sin u, u) \mid v, u \in \mathbb{R}, v > 0 \}$$

Die Wendelfläche F^2 ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 , denn

$$\Phi : (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \Phi(u, v) \in F$$

ist eine lokale Parametrisierung um den Punkt $\Phi(u_0, v_0) \in F$ für jedes $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.

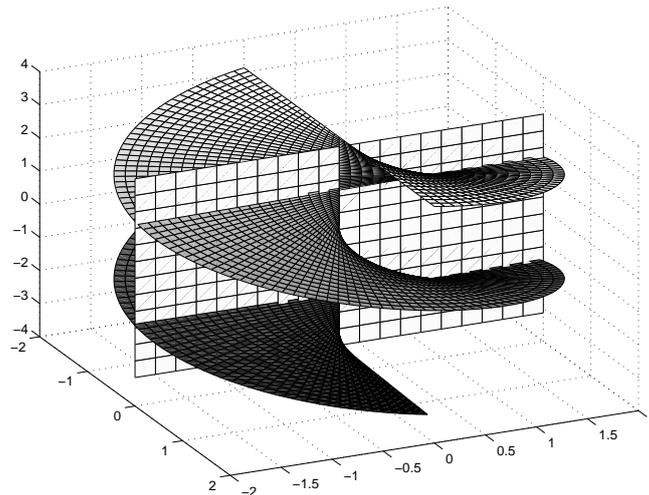


Abbildung 10.1: Wendelfläche geschnitten mit einer Ebene durch die z-Achse

In den Übungsaufgaben (siehe auch Abschnitt 10.14) und in den Übungen werden weitere Beispiele für Teilmengen des \mathbb{R}^N behandelt, die Untermannigfaltigkeiten bzw. keine Untermannigfaltigkeiten sind.

10.1.2 Untermannigfaltigkeiten mit Rand

Bisher haben wir Untermannigfaltigkeiten behandelt, die anschaulich gesprochen, keinen "Rand" haben. Solch einfache Mengen, wie z.B. die Kreisscheibe im \mathbb{R}^2 , wurden durch die bisherige Definition nicht erfaßt. Wir erweitern nun den Begriff der Untermannigfaltigkeit und lassen auch Untermannigfaltigkeiten mit Rand, z.B. die Kreisscheibe, zu.

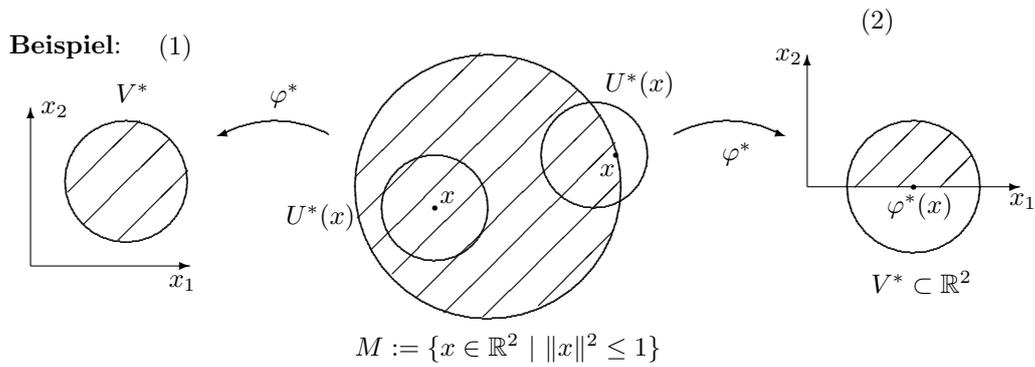
Definition. $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ heißt Halbraum.
 $\partial\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid x_n = 0\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ ist der Rand des Halbraumes.

Definition.* Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand, falls es um jeden Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $U^* \subset \mathbb{R}^N$ und einen Diffeomorphismus $\varphi^* : U^* \rightarrow V^*$ von U^* auf eine offene Menge $V^* \subset \mathbb{R}^N$ gibt, so daß eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist

1. $\varphi^*(U^* \cap M) = V^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, oder
2. $\varphi^*(U^* \cap M) = V^* \cap (\mathbb{R}_+^n \times \{0\})$ und für die n . Koordinate von $\varphi^*(x)$ gilt $\varphi_n^*(x) = 0$.

Auch in diesem Fall heißt das Paar $(U := U^* \cap M, \varphi := \varphi^*|_{U^*})$ Karte um $x \in M$.

Wir veranschaulichen die beiden Fälle am Beispiel der Kreisscheibe im \mathbb{R}^2 (dabei ist $N = n = 2$).



Im "Inneren" der Kreisscheibe gibt es eine Karte vom Typ (1), für den "Rand" eine Karte vom Typ (2). Wir zeigen nun, dass ein Punkt x einer Untermannigfaltigkeit entweder Karten vom Typ (1) oder Karten vom Typ (2) hat.

Satz 10.4 Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und $x \in M^n$. Dann erfüllen die Diffeomorphismen $\varphi^* : U^* \rightarrow V^*$, die eine Karte um x definieren, entweder alle die Bedingung 1. oder alle die Bedingung 2. aus der vorstehenden Definition*.

Beweis: Wir schließen indirekt und nehmen dazu an, daß ein Diffeomorphismus $\varphi_1^* : U_1^* \rightarrow V_1^*$ mit $x \in U_1^*$ und $\varphi_1^*(U_1^* \cap M) = V_1^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ und ein Diffeomorphismus $\varphi_2^* : U_2^* \rightarrow V_2^*$ mit $x \in U_2^*$, $\varphi_2^*(U_2^* \cap M) = V_2^* \cap (\mathbb{R}_+^n \times \{0\})$ und $(\varphi_2^*)_n(x) = 0$ existiert. Wir setzen $O := U_2^* \cap U_1^*$. Dann ist $\varphi_1^*(O \cap M) \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\varphi_2^* \circ (\varphi_1^*)^{-1} : \varphi_1^*(O \cap M) \rightarrow \varphi_2^*(O \cap M) \subset \mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}^n$$

ist ein Diffeomorphismus, der $\varphi_2^* \circ (\varphi_1^*)^{-1}(\varphi_1^*(x)) = \varphi_2^*(x)$ erfüllt. Insbesondere ist die Menge $\varphi_2^*(O \cap M)$ offen im \mathbb{R}^n . Es gilt aber $\varphi_2^*(O \cap M) \subset \mathbb{R}_+^n$ und $\varphi_2^*(x) \in \partial \mathbb{R}_+^n$, also kann $\varphi_2^*(O \cap M)$ nicht offen im \mathbb{R}^n sein. Dies ist ein Widerspruch. \square

Satz 10.4 erlaubt die folgende Definition:

Definition. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Die Menge

$$\partial M := \{x \in M \mid \exists \text{ Karte um } x, \text{ die Bedingung 2. aus Definition* erfüllt}\}$$

heißt Rand von M . Die Menge

$$\text{Int}(M) := \{x \in M \mid \exists \text{ Karte um } x, \text{ die Bedingung 1. aus Definition* erfüllt}\}$$

heißt Inneres von M .

Die Untermannigfaltigkeit M ist die disjunkte Vereinigung des Inneren und des Randes: $M = \text{Int}(M) \cup \partial M$.

Satz 10.5 Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist $\text{Int}(M)$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand und ∂M entweder leer oder eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand.

Beweis: Nach Definition ist $\text{Int}(M)$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Sei $\partial M \neq \emptyset$ und $x \in \partial M$. Dann existiert ein Diffeomorphismus $\varphi^* : U^* \rightarrow V^*$ mit $x \in U^*$ und $\varphi^*(U^* \cap M) = V^* \cap (\mathbb{R}_+^n \times \{0\})$. Ist dann $y \in U^* \cap \partial M$, so folgt $\varphi_n^*(y) = 0$. Ist nämlich $\varphi_n^*(y) > 0$, würde man durch Einschränkung des Diffeomorphismus φ^* eine Karte vom Typ (1) um y erhalten, was dem Satz 10.4 widerspricht. Somit erhalten wir

$$\varphi^*(U^* \cap \partial M) = V^* \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}).$$

Ist $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ die von φ^* definierte Karte um $y \in M \cap \partial M \subset M$, so ist $(U \cap \partial M, \hat{\varphi} := \varphi_{U \cap \partial M} = (x_1, \dots, x_{n-1}))$ eine Karte um y in der Teilmenge ∂M . \square

10.2 Tangential- und Normalenräume an Untermannigfaltigkeiten

Für eine differenzierbare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist das Differential im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung $DF_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Den Wert der Abbildung DF_x angewendet auf einen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ erhält man durch die Richtungsableitung von F in Richtung \mathbf{a} , d.h. durch die Ableitung von F entlang der Geraden durch x in Richtung \mathbf{a}

$$DF_x(\mathbf{a}) = \frac{d}{dt}(F(x + t\mathbf{a}))|_{t=0}$$

Den Vektorraum \mathbb{R}^n , auf dem das Differential DF_x definiert ist, kann man als die Menge der Tangentialvektoren an alle Geraden $\gamma(t) = x + t\mathbf{a}$ durch x in $t = 0$ betrachten.

Wir wollen dies in den folgenden beiden Abschnitten auf differenzierbare Abbildungen $F : M \rightarrow N$ zwischen Untermannigfaltigkeiten verallgemeinern. Dazu definieren und untersuchen wir in diesen Abschnitt zunächst diejenigen Vektorräume, zwischen denen das Differential von F abbilden soll, die sogenannten Tangentialräume. Die Rolle der Geraden durch x übernehmen jetzt im Falle von Untermannigfaltigkeiten diejenigen glatten Kurven $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ durch x , deren Bild auf der Untermannigfaltigkeit M liegt.

Im folgenden sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit oder ohne Rand.

Definition. Sei $x \in M$. Die Menge der Vektoren

$$T_x M := \left\{ v \in \mathbb{R}^N \mid \exists \text{ glatte Kurve } \gamma : I \rightarrow M \text{ mit } \gamma(0) = x, \gamma'(0) = v, \right. \\ \left. \text{wobei } I = (-\varepsilon, \varepsilon), [0, \varepsilon) \text{ oder } (-\varepsilon, 0] \right\}$$

heißt Tangentialraum von M im Punkt x . Die Elemente von $T_x M$ heißen Tangentialvektoren an M im Punkt x .

Satz 10.6 Der Tangentialraum $T_x M$ einer n -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^N$ im Punkt $x \in M$ ist ein n -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^N .

Beweis: Sei $\varphi^* : U^* \rightarrow V^*$ ein eine Karte um $x \in M$ definierender Diffeomorphismus. Dann ist gemäß Definition $\varphi^*(U^* \cap M) = V^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{o\})$, falls $x \in \text{Int}(M)$ oder $\varphi^*(U^* \cap M) = V^* \cap (\mathbb{R}_+^n \times \{o\})$ und $\varphi_n^*(x) = 0$, falls $x \in \partial M$. Da φ^* ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^N ist, ist das Differential $D\varphi_x^* : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein Isomorphismus. Wir werden zeigen, daß

$$(D\varphi_x^*)^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{o\}) = T_x M. \quad (*)$$

gilt. Weil lineare Isomorphismen n -dimensionale Vektorräume wieder auf ebensolche abbilden, folgt aus dieser Behauptung dann der Satz 10.6.

Sei zunächst $w \in \mathbb{R}^n \times \{o\}$. Die n . Koordinate des Vektors w sei mit w_n bezeichnet. Wir betrachten die glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow U^*$

$$\gamma(t) := (\varphi^*)^{-1}(\varphi^*(x) + tw),$$

wobei $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ falls $x \in \text{Int}(M)$, $I = [0, \varepsilon)$ falls $x \in \partial M$ und $w_n > 0$, und $I = (-\varepsilon, 0]$ falls $x \in \partial M$ und $w_n < 0$. Dabei wird ε so klein gewählt, daß $\varphi^*(x) + tw \in V^*$ für alle $t \in I$. Also folgt $\varphi^*(x) + tw \in V^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{o\})$ und daher

$$\gamma(t) = (\varphi^*)^{-1}(\varphi^*(x) + tw) \subset U^* \cap M \subset M.$$

Außerdem erhalten wir $\gamma(0) = x$ und mit der Kettenregel für differenzierbare Abbildungen zwischen reellen Räumen

$$\gamma'(0) = (D\varphi^{*-1})_{\varphi^*(x)}(w) = (D\varphi_x^*)^{-1}(w).$$

Gemäß der Definition von $T_x M$ ist also $(D\varphi_x^*)^{-1}(w) \in T_x M$.

Sei nun $v \in T_x M$. Dann existiert eine glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$. Wählen wir das Intervall I klein genug, so ist $\gamma(t) \in U^*$ für alle $t \in I$. Also folgt $\varphi^*(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^n \times \{o\}$. Ableiten in $t = 0$ und Anwenden der Kettenregel ergibt $D\varphi_x^*(\gamma'(0)) \in \mathbb{R}^n \times \{o\}$. Wegen $v = \gamma'(0)$ folgt also auch die umgekehrte Inklusion von (*). \square

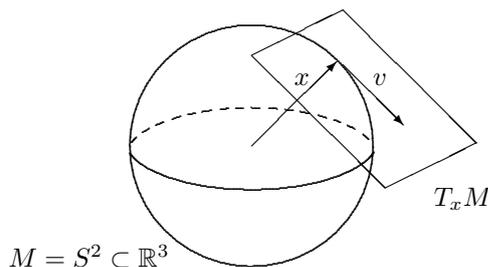
Beispiel 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $x \in U$. Dann gilt $T_x U = \mathbb{R}^n$.

Beispiel 2: Sei $S_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$ die n -dimensionale Sphäre und $x \in S_r^n$. Dann gilt

$$T_x S_r^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}.$$

Ist nämlich $v \in T_x S_r^n$, so existiert eine glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$ und $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle \equiv r^2$ für alle $t \in I$.

Durch Ableiten der letzten Gleichung nach t erhalten wir $\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$. Für $t = 0$ ergibt sich $\langle v, x \rangle = 0$. Folglich gilt $T_x S_r^n \subset \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$. Da beide Vektorräume die gleiche Dimension haben folgt die Behauptung.



Beispiel 3: Sei $F = (F_1, \dots, F_{N-n}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ eine C^∞ -Abbildung und $M := F^{-1}(o)$ die Nullstellenmenge von F . Die Jacobimatrix DF_x habe maximalen Rang $N - n$ für alle $x \in M$. Dann ist M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und es gilt

$$\begin{aligned} T_x M &= \left(\text{span} \{ \text{grad } F_1(x), \dots, \text{grad } F_{N-n}(x) \} \right)^\perp \\ &= \{ v \in \mathbb{R}^N \mid \langle v, \text{grad } F_i(x) \rangle = 0, i = 1, \dots, N - n \}. \end{aligned}$$

Da die beiden in der Behauptung auftretenden Unterräume des \mathbb{R}^N die gleiche Dimension haben, genügt es zu zeigen, daß $T_x M \subset \left(\text{span} \{ \text{grad } F_1(x), \dots, \text{grad } F_{N-n}(x) \} \right)^\perp$. Sei also $v \in T_x M$. Dann existiert eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$, so daß $F_i(\gamma(t)) \equiv 0$ für alle $t \in I$ und $i = 1, \dots, N - n$. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$(DF_i)_x(v) = \langle \text{grad } F_i(x), v \rangle = 0,$$

für alle $i = 1, \dots, N - n$. Daraus folgt die Behauptung.

Beispiel 4: Sei $M^n \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\Phi : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine lokale Parametrisierung um $x = \Phi(u) \in M$. Dann gilt

$$T_x M = \text{span} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(u), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(u) \right\}.$$

Da nach Voraussetzung die Jacobimatrix $D\Phi_u = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(u), \dots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(u) \right)$ den Rang n hat, ist $\text{span} \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(u), \dots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(u) \right\}$ ein n -dimensionaler Unterraum. Es genügt also zu zeigen, daß $\text{span} \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(u), \dots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(u) \right\} \subset T_x M$ gilt. Wir betrachten dazu die glatte Kurve $\gamma(t) := \Phi(u + te_i)$. Dann ist $\gamma(0) = x$ und aus der Kettenregel folgt $\gamma'(0) = D\Phi_u(e_i) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(u)$. Es folgt $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(u) \in T_x M$ und somit die Behauptung.

Definition. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $x \in M$. Der zum Tangentialraum $T_x M$ orthogonale Vektorraum

$$N_x M := \{w \in \mathbb{R}^N \mid w \perp T_x M\} = (T_x M)^\perp$$

heißt Normalenraum von M im Punkt $x \in M$. Die Elemente von $N_x M$ heißen Normalenvektoren an M im Punkt x . Die n -dimensionale Ebene

$$\text{Tan}_x M := x + T_x M \subset \mathbb{R}^N$$

heißt Tangentialebene von M in $x \in M$ und die $(N - n)$ -dimensionale Ebene

$$\text{Nor}_x M := x + N_x M \subset \mathbb{R}^N$$

heißt Normalenebene von M in $x \in M$.

Aus den Beispielen 3 und 4 erhält man folgende Möglichkeiten, die Normalenräume zu berechnen:

1. Ist $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine lokale Parametrisierung um $x = \Phi(u) \in M$, dann ist

$$N_x M = \mathbb{R} \left(\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(u) \times \dots \times \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(u)}_{\text{Vektorprodukt}} \right).$$

2. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine gleichungsdefinierte Hyperfläche, d.h. $M = F^{-1}(0)$ für eine glatte Abbildung $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit nichtverschwindendem Gradienten. Dann ist $N_x M = \mathbb{R} \cdot \text{grad } F(x)$.

Ein konkretes Beispiel:

Sei $M^2 = S^2$ die 2-dimensionale Sphäre im \mathbb{R}^3 . Dann gilt

$$\begin{aligned} T_{(0,0,1)} S^2 &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ N_{(0,0,1)} S^2 &= \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Weitere Beispiele findet man in den Übungsaufgaben in Abschnitt 10.14.

10.3 Differenzierbare Abbildungen und ihr Differential

Wir definieren nun den Begriff der differenzierbaren Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten.

Definition. Seien $M_1^{n_1} \subset \mathbb{R}^{N_1}$ und $M_2^{n_2} \subset \mathbb{R}^{N_2}$ zwei Untermannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $F : M_1 \rightarrow M_2$ heißt differenzierbar von der Klasse C^k , $1 \leq k \leq \infty$, falls für jede Karte (U, φ) von M_1 die Abbildung

$$F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$$

eine C^k -Abbildung ist.

Mit $C^k(M)$ bezeichnen wir den Ring aller reellwertigen C^k -Abbildungen auf M . Mit $C^k(M_1, M_2)$ bezeichnen wir den Vektorraum aller C^k -Abbildungen zwischen den Untermannigfaltigkeiten M_1 und M_2 .

Bemerkungen:

- (1) In der Regel werden wir uns auf glatte, d.h. C^∞ -Abbildungen beschränken. Wenn der Grad der Differenzierbarkeit nicht interessiert, so sagen wir auch kurz differenzierbare Abbildung (und lassen der Kürze halber die Angabe C^k weg).
- (2) Es genügt, die Differenzierbarkeit der Abbildungen $F \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ für einen Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ zu überprüfen (Übungsaufgabe).
- (3) Ist $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ eine offene Teilmenge, dann stimmt der eben definierte Differenzierbarkeitsbegriff mit dem schon bekannten für Abbildungen zwischen reellen Vektorräumen überein.
- (4) Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit der Klasse C^k und (U, φ) eine Karte auf M . Dann ist die Kartenabbildung $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar von der Klasse C^k (Übungsaufgabe).
- (5) Seien $F : M_1 \rightarrow M_2$ und $G : M_2 \rightarrow M_3$ differenzierbar, dann ist $G \circ F : M_1 \rightarrow M_3$ differenzierbar (Übungsaufgabe).

Definition. Ist $F : M_1^{n_1} \rightarrow M_2^{n_2}$ eine Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten. Sei (U, φ) eine Karte um $x \in M_1$ und (V, ψ) eine Karte um $F(x) \in M_2$. Dann heißt die Abbildung

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^{n_2}$$

Kartendarstellung von F bzgl. der Karten (U, φ) und (V, ψ) .

Ist speziell $F : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$, so heißt $F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^N$ Kartendarstellung von F bzgl. der Karte (U, φ) .

Die Abbildung F ist differenzierbar von der Klasse C^k , wenn alle ihre Kartendarstellungen C^k -Abbildungen sind.

Das Differential einer differenzierbaren Abbildung $F : M_1 \rightarrow M_2$ definiert man nun in Analogie zu den Abbildungen zwischen reellen Räumen als Ableitung von F entlang von Kurven:

Definition. Sei $F : M_1 \rightarrow M_2$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten. Unter dem Differential der Abbildung F im Punkt $x \in M_1$ versteht man die Abbildung

$$\begin{aligned} dF_x : T_x M_1 &\rightarrow T_{F(x)} M_2 \\ \gamma'(0) &\mapsto (F\gamma)'(0), \end{aligned}$$

wobei $\gamma : I \rightarrow M_1$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = x$ ist.

Bemerkung 1: Die Definition von dF_x ist korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl von γ : Sei $v \in T_x M$ und sei γ eine beliebige glatte Kurve auf M_1 mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$. Wir wählen eine Karte (U, φ) um x . Dann folgt aus der Kettenregel für differenzierbare Abbildungen zwischen reellen Räumen, dass

$$(F\gamma)'(0) = D(F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}((\varphi\gamma)'(0)).$$

Da die Kartenabbildung φ nach Definition durch Einschränkung eines lokalen Diffeomorphismus φ^* im Einbettungsraum \mathbb{R}^N entsteht, folgt aus der Kettenregel weiterhin $(\varphi\gamma)'(0) = (\varphi^*\gamma)'(0) = D\varphi_x^*(\gamma'(0)) = D\varphi_x^*(v)$ und somit

$$(F\gamma)'(0) = D(F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ D\varphi_x^*(v).$$

$(F\gamma)'(0)$ hängt also nicht von der Wahl der Kurve γ ab.

Bemerkung 2: Sind $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ und $M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ offene Teilmengen der reellen Vektorräume, dann stimmt das soeben definierte Differential mit dem in Kapitel 6 definierten Differential überein:

$$dF_x(v) = \frac{d}{dt} F(\underbrace{x + tv}_{\gamma(t)})|_{t=0} = DF_x(v).$$

Satz 10.7 Seien $F : M_1 \rightarrow M_2$ und $G : M_2 \rightarrow M_3$ differenzierbar und $x \in M_1$.

1. Das Differential $dF_x : T_x M_1 \rightarrow T_{F(x)} M_2$ ist eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen.
2. Es gilt die Kettenregel: $d(G \circ F)_x = dG_{F(x)} \circ dF_x$.

Beweis: Sei $v \in T_x M_1$ und $\gamma : I \rightarrow M_1$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$.

Zu 1. Sei (U, φ) eine Karte um x . Nach der Definition des Differentials von F und der Kettenregel für Abbildungen zwischen reellen Räumen folgt dann wie oben

$$dF_x(v) = (F \circ \gamma)'(0) = [(F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)]'(0) = D(F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ D\varphi_x^*(v),$$

Da die Differentiale differenzierbarer Abbildungen im \mathbb{R}^N linear sind, ist dF_x als Komposition linearer Abbildungen wieder linear.

Zu 2. Anwenden der Definition ergibt

$$\begin{aligned} (dG)_{F(x)} \circ (dF)_x(v) &= (dG)_{F(x)}((F \circ \gamma)'(0)) = (G \circ (F \circ \gamma))'(0) = ((G \circ F) \circ \gamma)'(0) \\ &= d(G \circ F)_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = d(G \circ F)_x(v). \end{aligned}$$

□

Die folgende Feststellung erleichtert oft den Nachweis, dass eine auf einer Untermannigfaltigkeit definierte Abbildung differenzierbar ist und gibt gleichzeitig einen Weg an, ihr Differential zu berechnen. Den Beweis lassen wir als Übungsaufgabe.

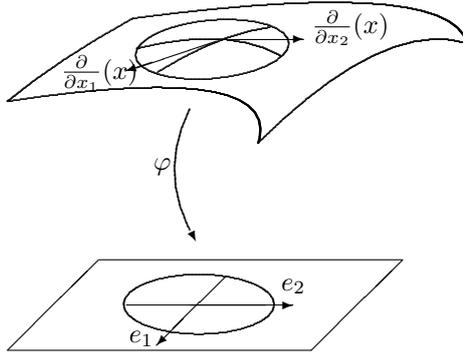
Satz 10.8 Sei $F : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^k -Abbildung von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^N$ in den \mathbb{R}^k und sei $M^n \subset U \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist $f := F|_M : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^k -Abbildung von der Untermannigfaltigkeit M in den \mathbb{R}^k und es gilt $df_x = DF_x|_{T_x M}$.

10.4 Kanonische Basen und Kobasen

Wie man aus der Algebra weiß, ist es oft nützlich, spezielle Basen in Vektorräumen zu betrachten. Als Basis eines Tangentialraumes $T_x M$ benutzt man häufig die durch eine Karte um x definierte sogenannte kanonische Basis, die jetzt definiert werden soll.

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte um $x \in M$. Es bezeichne e_i den i . kanonischen Basisvektor im \mathbb{R}^n (die i . Komponente von e_i ist 1, alle anderen Komponenten von e_i sind Null). Wir betrachten den Tangentialvektor im Punkt $x \in M$, der durch die Ableitung der i . Koordinatenlinie $\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_i)$ durch x in $t = 0$ definiert wird:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) := \left. \frac{d}{dt} \left(\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_i) \right) \right|_{t=0} = (d\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \in T_x M$$



Für den Tangentialraum im Punkt $x \in M$ gilt $T_x M = d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Da die Abbildung $d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}$ ein Isomorphismus ist, bilden die n Vektoren

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right)$$

eine Basis im Tangentialraum $T_x M$. Diese Basis nennt man *kanonische Basis in $T_x M$ bezüglich der Karte (U, φ)* .

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}^2$. Wir bestimmen die kanonischen Basen der durch die Euklidischen und durch die Polarkoordinaten definierten Karten:

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die durch die Euklidischen Koordinaten gegebene Karte $\varphi(x) := (x_1, x_2)$. Für diese Karte gilt offensichtlich

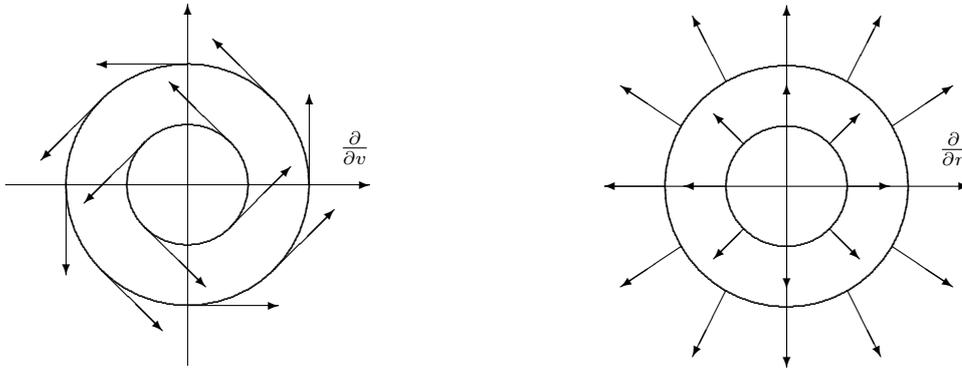
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = e_i \quad \text{für jeden Punkt } x = (x_1, x_2) \in M.$$

Die Polarkoordinaten auf \mathbb{R}^2 sind gegeben durch die Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$

$$\Phi(r, v) := (r \cos v, r \sin v).$$

Im Punkt $x = (x_1, x_2) = \Phi(r, v)$ gilt dann für die durch die Parametrisierung Φ definierte Karte (U, Φ^{-1})

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(x) &= \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, v) = (\cos v, \sin v) = \frac{1}{r} x & \text{und} \\ \frac{\partial}{\partial v}(x) &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}(r, v) = (-r \sin v, r \cos v) = (-x_2, x_1). \end{aligned}$$



Wir beschreiben nun die Beziehung zwischen den kanonischen Basen zu zwei verschiedenen Karten um einen Punkt einer Untermannigfaltigkeit.

Satz 10.9 (Transformationsformel für kanonische Basen) Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $x \in M$. $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ und $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ seien zwei Karten um x . Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_{\alpha}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}(x),$$

wobei $\frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_{\alpha}}{\partial x_i}(\varphi(x))$ die α -te Komponente des Vektors der i -ten partiellen Ableitung $\frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x))$ ist.

Die Übergangsmatrix zwischen den kanonischen Basen von (U, φ) und (V, ψ) ist also die Jacobimatrix des Kartenüberganges $\psi \circ \varphi^{-1}$.

Beweis: Bezeichne (e_1, \dots, e_n) die kanonische Basis des \mathbb{R}^n . Die i -te Spalte der Jacobimatrix $D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ ist gegeben durch $d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_{\alpha}}{\partial x_i} \cdot e_{\alpha}$. Dann folgt per Definition, Kettenregel und Linearität des Differentials

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(x) &= (d\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) = d(\psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) \\ &= (d\psi^{-1})_{\psi(x)} \circ d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) \\ &= (d\psi^{-1})_{\psi(x)} \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_{\alpha}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot e_{\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_{\alpha}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot (d\psi^{-1})_{\psi(x)}(e_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_{\alpha}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}(x). \end{aligned}$$

□

Auf analoge Weise erhält man die Basisdarstellung des Differentials einer differenzierbaren Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten bezüglich kanonischer Basen:

Satz 10.10 (Basisdarstellung des Differentials einer differenzierbaren Abbildung)

Sei $F : M_1 \rightarrow M_2$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten und $x \in M_1$. Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte um $x \in M_1$ und $(W, \psi = (z_1, \dots, z_k))$ eine Karte um $F(x) \in M_2$. Dann gilt für die lineare Abbildung $dF_x : T_x M_1 \rightarrow T_{F(x)} M_2$

$$dF_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x) \right) = \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\alpha}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}}(F(x)).$$

Die Matrix von dF_x bezüglich der kanonischen Basen der Karte (U, φ) um $x \in M_1$ und (W, ψ) um $F(x) \in M_2$ ist also die Jacobimatrix der Kartendarstellung $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ von F in $\varphi(x)$.

Beweis: Der Beweis erfolgt wie in Satz 10.9.

$$\begin{aligned}
dF_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right) &= dF_x((d\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i)) = d(\psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) \\
&= (d\psi^{-1})_{\psi(F(x))} \circ d(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) \\
&= (d\psi^{-1})_{\psi(F(x))} \left(\sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\alpha}(\varphi(x))}{\partial x_i} \cdot e_{\alpha} \right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\alpha}(\varphi(x))}{\partial x_i} \cdot (d\psi^{-1})_{\psi(F(x))}(e_{\alpha}) \\
&= \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\alpha}(\varphi(x))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}}(F(x)).
\end{aligned}$$

□

Aus der Algebra wissen wir, dass man jedem Vektorraum sein algebraisches Dual zuordnen kann. Dies tun wir jetzt mit den Tangentialräumen an eine Untermannigfaltigkeit. Insbesondere wollen wir die dualen Basen zu den kanonischen Basen in den Tangentialräumen beschreiben.

Definition. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $x \in M$ und $T_x M$ der Tangentialraum an x . Der Vektorraum

$$T_x^* M := \{L : T_x M \longrightarrow \mathbb{R} \mid L \text{ linear}\}$$

heißt dualer Tangentialraum an M im Punkt x (oder auch Cotangentialraum).

Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare reellwertige Abbildung und $x \in M$. Das Differential $df_x : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$ von f im Punkt x ist linear, also ist $df_x \in T_x^* M$.

Insbesondere sind die Koordinatenfunktionen $x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ einer Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ glatte reellwertige Abbildungen. Also ist $(dx_i)_x : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$ linear und somit gilt $(dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x \in T_x^* M$.

Satz 10.11 Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte auf M um x mit kanonischer Basis $(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x))$ in $T_x M$. Dann bilden die Differentiale $((dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x)$ die duale Basis im Cotangentialraum $T_x^* M$, d.h.

$$(dx_i)_x\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Beweis: Einsetzen der Definition ergibt

$$\begin{aligned}
(dx_i)_x\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right) &= (dx_i)_x\left(\frac{d}{dt}(\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_j))\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}x_i(\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_j))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\varphi(x) + te_j)_i|_{t=0} = \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

□

Aus der Transformationsformel für duale Basen (siehe Lineare Algebra) erhalten wir die folgende Transformationsformel für die dualen Basen

Satz 10.12 Sind $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ und $(W, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ zwei Karten auf M um x , so gilt

$$(dy_\alpha)_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_\alpha}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot (dx_i)_x.$$

10.5 Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten

Definition. Ein glattes Vektorfeld auf einer Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^N$ ist eine C^∞ -Abbildung $X : M \rightarrow \mathbb{R}^N$, so daß $X(x) \in T_x M$ für alle $x \in M$ gilt.

Bemerkung: Sei $\mathfrak{X}(M)$ die Menge aller glatten Vektorfelder auf M , dann gilt:

1. Sind $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, so ist auch $X_1 + X_2 \in \mathfrak{X}(M)$.
2. Ist $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$, so ist auch $fX \in \mathfrak{X}(M)$.

$\mathfrak{X}(M)$ ist also ein Modul über dem Ring $C^\infty(M)$ der glatten Funktionen.

Beispiel 1:

Die Abbildung $X : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

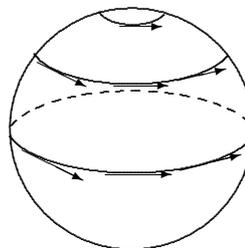
$$X(x, y, z) := (-y, x, 0)$$

ist ein glattes Vektorfeld auf der Sphäre

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Die Glattheit von X folgt aus Satz 10.8.

Da $\langle X(p), p \rangle = 0$ für $p \in S^2$, ist $X(p) \in T_p S^2$.



Beispiel 2: Kanonische Basisfelder

Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte auf einer Untermannigfaltigkeit M und bezeichne $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(x))$ den im letzten Abschnitt definierten i. kanonischen Basisvektor der Karte (U, φ) im Punkt $x \in U$. Da die Abbildungen $\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}$ und φ glatt sind, ist die Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

die jedem Punkt $x \in U$ den kanonischen Basisvektor $\frac{\partial}{\partial x_i}(x)$ zuordnet, ein glattes Vektorfeld auf dem Kartenbereich $U \subset M$. Das n -Tupel der Abbildungen $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ heißt *kanonisches Basisfeld bezüglich (U, φ)* .

Jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ kann man über dem Kartenbereich U punktweise in der kanonischen Basis darstellen:

$$X(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(x), \quad x \in U.$$

Die Komponenten in dieser Basisdarstellung definieren glatte Funktionen $\xi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, (Übungsaufgabe). Über U gilt also

$$X|_U = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (*)$$

mit $\xi_i \in C^\infty(U)$. (*) heißt *lokale Darstellung des Vektorfeldes X bezüglich der Karte (U, φ)* . Die Kartendarstellungen der Koordinatenfunktionen ξ_i

$$\xi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

heißen *Komponenten von X bezüglich der Karte (U, φ)* .

Als nächstes übertragen wir die Definition der Richtungsableitung, die wir im \mathbb{R}^n bereits kennen, auf den Fall der Untermannigfaltigkeiten.

Definition. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung mit Werten in einem reellen Vektorraum.

1. Sei $v \in T_x M$ ein Tangentialvektor an M im Punkt x . Der Vektor

$$v(F) := dF_x(v) \in T_{F(x)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$$

heißt *Richtungsableitung von F nach dem Vektor v* .

2. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld auf M . Die Abbildung $X(F) : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$X(F)(x) := dF_x(X(x)),$$

heißt *Richtungsableitung von F nach dem Vektorfeld X* .

Beispiel: Sei $(U, \varphi := (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte auf M und $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(U)$ ein kanonisches Basisvektorfeld dieser Karte, dann gilt für die Richtungsableitung von $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ nach dem Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(F) = \frac{\partial(F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi.$$

Aus der Definition folgt nämlich mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(F)(x) = dF_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right) = dF_x(d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}(e_i)) = d(F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) = \frac{\partial(F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)).$$

Den Beweis der folgenden Eigenschaften der Richtungsableitung lassen wir als Übungsaufgabe.

Satz 10.13 Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ glatte Vektorfelder, $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dann gilt:

1. $(X + Y)(F) = X(F) + Y(F)$.
2. $(fX)(F) = f \cdot X(F)$.
3. $X(f \cdot F) = X(f) \cdot F + f \cdot X(F)$.
4. Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte von M und $X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ die lokale Darstellung von X bezüglich dieser Karte. Dann gilt für die Richtungsableitung:

$$X(F)|_U = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \frac{\partial(F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi.$$

5. $X(F) \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$.

Abschließend wollen wir eine Methode kennenlernen, mit der man zwei Vektorfeldern auf M ein neues Vektorfeld, den sogenannten Kommutator, zuordnen kann.

Nach Definition sind die glatten Vektorfelder auf M insbesondere glatte Abbildungen von M mit Werten im reellen Vektorraum \mathbb{R}^N . Dass eine glatte Abbildung $X : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ tatsächlich ein Vektorfeld auf M beschreibt, drückt sich in einer *zusätzlichen* Eigenschaft

der Bilder dieser Abbildung aus: $X(x)$ ist tangential an M im Punkt x . Man kann also ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$, betrachtet als glatte Abbildung $X : M \rightarrow \mathbb{R}^N$, in Richtung eines anderen Vektorfeldes $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ableiten. In der Regel ist dann zwar $Y(X) : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine glatte Abbildung, aber kein Vektorfeld auf M mehr, da die Werte $Y(X)(x)$ nicht tangential an M sind. Diese nichttangente "Störung" kann man beseitigen, indem man die vertauschte Richtungsableitung wieder abzieht. Es gilt der folgende Satz:

Satz 10.14 *Seien X und Y zwei glatte Vektorfelder auf einer n -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$. Dann definiert die glatte Abbildung*

$$[X, Y] := X(Y) - Y(X) : M \rightarrow \mathbb{R}^N$$

ein Vektorfeld auf M . (Hierbei ist $X(Y)$ die Richtungsableitung der Abbildung $Y : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ nach dem Vektorfeld X und $Y(X)$ die Richtungsableitung der Abbildung $X : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ nach dem Vektorfeld Y). Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte von M bezüglich derer X bzw. Y die lokalen Darstellungen $X|_U = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ bzw. $Y|_U = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ haben. Dann gilt

$$[X, Y]|_U = \sum_{i=1}^n (X(\eta_i) - Y(\xi_i)) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definition. *Seien X und Y zwei glatte Vektorfelder auf einer Untermannigfaltigkeit M . Das Vektorfeld $[X, Y]$ heißt Kommutator von X und Y .*

Beweis von Satz 10.14: Um zu zeigen, dass $[X, Y]$ ein Vektorfeld auf M ist, müssen wir zeigen, dass $[X, Y](x) \in T_x M$ für alle $x \in M$ gilt. Dazu betrachten wir die lokale Darstellung der Vektorfelder X und Y bzgl. einer beliebigen Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ und zeigen, dass auch $[X, Y]|_U$ sich durch die kanonischen Basisfelder dieser Karte darstellen läßt.

Durch Anwendung der Produktregel für die Richtungsableitung erhält man

$$\begin{aligned} [X, Y]|_U &= X\left(\sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) - Y\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[X(\eta_i) - Y(\xi_i)\right] \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \left[\eta_i X\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - \xi_i Y\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right]. \end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, daß die letzte Summe verschwindet. Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\eta_i X\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - \xi_i Y\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right] &= \sum_{i,j=1}^n \left[\eta_i \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - \xi_i \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^n \eta_i \xi_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \eta_i \xi_j \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right] \end{aligned}$$

bleibt zu beweisen, daß für den Kommutator von kanonischen Basisfeldern $\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right] = 0$ gilt. Aus der Definition der kanonischen Basisfelder und der Formel für die Richtungsableitung einer Funktion nach einem Basisvektorfeld folgt

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right] &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}\right) \circ \varphi\right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_j}\right) \circ \varphi\right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x_j \partial x_i} \circ \varphi - \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j} \circ \varphi. \end{aligned}$$

Da dies die üblichen partiellen Ableitungen sind und alle Abbildungen glatt sind, folgt die Behauptung aus dem Symmetrie-Lemma von Schwarz. (Die gleiche Aussage gilt, falls die Untermannigfaltigkeit und die Vektorfelder mindestens von der Klasse C^2 sind. \square)

Folgerung. Für den Kommutator von kanonischen Basisfeldern auf einer C^2 -Untermannigfaltigkeit gilt

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \equiv 0.$$

Beispiel: Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-dimensionale Sphäre im \mathbb{R}^3 . Wir betrachten die folgenden drei glatten Vektorfelder auf S^2 :

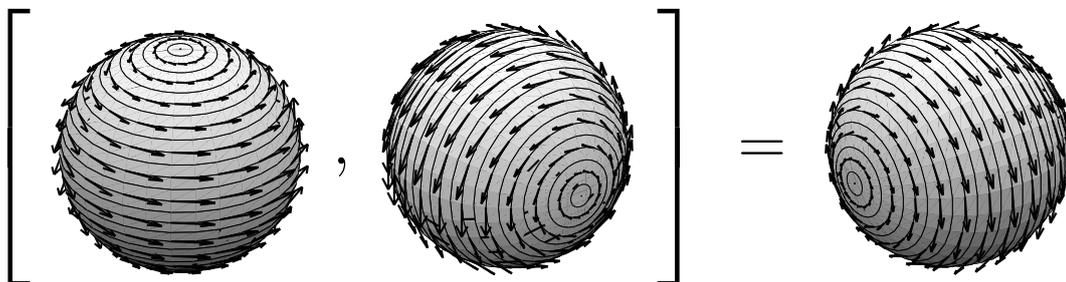
$$X(x, y, z) := (-y, x, 0) \quad , \quad Y(x, y, z) := (-z, 0, x) \quad , \quad Z(x, y, z) := (0, z, -y).$$

Dann gilt für die Kommutatoren: $[X, Y] = Z$, $[Y, Z] = X$ und $[Z, X] = Y$.

Wir zeigen dies hier nur für den ersten Kommutator: Die Vektorfelder X und Y auf S^2 entstehen durch die Einschränkung glatter Abbildungen auf \mathbb{R}^3 , die wir der Kürze halber mit dem gleichem Symbol bezeichnen. In diesem Fall gilt nach Satz 10.8 in $p = (x, y, z) \in S^2$:

$$\begin{aligned} [X, Y](p) &= X(Y)(p) - Y(X)(p) = dY_p(X(p)) - dX_p(Y(p)) = DY_p(X(p)) - DX_p(Y(p)) \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \right]^t = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}^t = Z(p). \end{aligned}$$

Das folgende nette Bild (es stammt von Thomas Neukirchner) veranschaulicht dies:



Den Beweis der folgenden Eigenschaften des Kommutators lassen wir als Übungsaufgabe. Sie folgen durch stures Anwenden der Rechenregeln für die Richtungsableitung.

Satz 10.15 (Eigenschaften des Kommutators von Vektorfeldern)

Es seien $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ glatte Vektorfelder und $f, g \in C^\infty(M)$ sowie $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ glatte Funktionen auf einer Untermannigfaltigkeit M . Dann gilt

- a) Die Abbildung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ ist \mathbb{R} -bilinear und schiefsymmetrisch.
- b) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$. (Jacobi-Identität)
- c) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.
- d) $[X, Y](F) = X(Y(F)) - Y(X(F))$.

10.6 Orientierbare und nichtorientierbare Untermannigfaltigkeiten

Man unterscheidet zwei Typen von Mannigfaltigkeiten, die orientierbaren und die nichtorientierbaren. Für die orientierbaren Mannigfaltigkeiten sind viele Begriffe technisch einfacher zu definieren und zu handhaben. Bevor wir diese beiden Typen von Untermannigfaltigkeiten definieren, erinnern wir nochmal an den Begriff der Orientierung eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraumes, der aus der Algebra bekannt ist.

Sei V^n ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und $\mathcal{B}(V)$ die Menge der Basen in V . Seien $\underline{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ und $\underline{\mathbf{b}} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ zwei Basen in V und bezeichne $M_{\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}} := (M_{ij})$ ihre Übergangsmatrix, die durch

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^n M_{ij} \mathbf{b}_i$$

definiert ist.

Wir nennen die Basen $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ *gleichorientiert* (und schreiben $\underline{\mathbf{a}} \sim \underline{\mathbf{b}}$), falls die Determinante der Übergangsmatrix $M_{\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}}$ positiv ist. \sim ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{B}(V)$ und der Faktorraum $\mathcal{B}(V)/\sim$ hat genau zwei Elemente.

Eine *Orientierung* \mathcal{O}_V von V ist eine Äquivalenzklasse $\mathcal{O}_V := [\underline{\mathbf{a}}]$ von Basen.

Sei (V, \mathcal{O}_V) ein orientierter Vektorraum. Eine Basis $\underline{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathcal{B}(V)$ heißt *positiv orientiert*, falls $\underline{\mathbf{a}} \in \mathcal{O}_V$.

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ fixieren wir die durch die kanonische Basis gegebene Orientierung und bezeichnen sie mit $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$, d.h. $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} := [(e_1, \dots, e_n)]$.

Ist speziell $V = \mathbb{R}^2$, dann ist $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$, falls \mathbf{a}_1 durch eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel φ , mit $0 < \varphi < \pi$, in ein positives Vielfaches von \mathbf{a}_2 überführt werden kann.

Ist $V = \mathbb{R}^3$, so ist $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ positiv orientiert, falls die "Rechte-Hand-Regel" gilt.

Ähnlich wie wir das bei den Vektorfeldern getan haben, werden wir den Begriff der Orientierung nun auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Unter einer Orientierung einer Untermannigfaltigkeit M werden wir eine Familie von Orientierungen in jedem Tangentialraum $T_x M$ von M verstehen, die in einem zu präzisierenden Sinne glatt vom Fußpunkt x des Tangentialraumes abhängt.

Definition. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit. M^n heißt *orientierbar*, falls eine Familie von Orientierungen $\mathcal{O}_M = \{\mathcal{O}_{T_x M}\}_{x \in M}$ in den Tangentialräumen existiert, die lokal um jeden Punkt durch kanonische Basisfelder von Karten der Untermannigfaltigkeit zu realisieren sind, d.h. für jedes $x \in M$ gibt es eine Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ um x mit

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y) \right) \in \mathcal{O}_{T_y M} \quad \text{für alle } y \in U.$$

Eine solche Karte (U, φ) heißt *positiv orientiert*. Die Familie \mathcal{O}_M heißt *Orientierung* von M . Das Paar (M, \mathcal{O}_M) heißt *orientierte Untermannigfaltigkeit*.

Während jeder endlich-dimensionale reelle Vektorraum genau zwei Orientierungen besitzt, müssen Mannigfaltigkeiten nicht notwendig orientierbar sein. Man hat das folgende Kriterium für Orientierbarkeit.

Satz 10.16 Eine Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^N$ ist genau dann orientierbar, wenn ein Atlas \mathcal{A} auf M existiert, so daß für alle Karten $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ gilt

$$\det (D(\psi \circ \varphi^{-1})_u) > 0 \quad \text{für alle } u \in \varphi(U \cap V) \quad (*).$$

Beweis: (\Rightarrow) Sei M orientierbar. Wir definieren

$$\mathcal{A} := \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ ist positiv orientierte Karte auf } M\}.$$

Aus der Definition der Orientierbarkeit folgt, daß \mathcal{A} die Mannigfaltigkeit M überdeckt. Sind also (U, φ) und (V, ψ) zwei Karten aus \mathcal{A} mit $U \cap V \neq \emptyset$, so ist die Determinante der Übergangsmatrix der induzierten Basen in $T_x M$ für $x \in U \cap V$ strikt positiv. Nach Satz 10.9 ist diese Determinante gerade durch die Jacobi-Determinante des Koordinatenübergangs gegeben.

(\Leftarrow) Sei \mathcal{A} ein Atlas mit der Eigenschaft (*) und $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Wir definieren Orientierungen auf den Tangentialräumen durch

$$\mathcal{O}_{T_x M} := \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right) \right], \quad x \in U$$

Da die Determinante der Übergangsmatrix zwischen zwei kanonischen Basen von Karten aus \mathcal{A} strikt positiv ist, ist $\mathcal{O}_{T_x M}$ korrekt definiert und erfüllt die Forderung aus der Definition. \square

Für den Spezialfall von Hyperflächen $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hat man das folgende leicht nachprüfbare Kriterium für Orientierbarkeit:

Satz 10.17 Eine Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist genau dann orientierbar, wenn auf M ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld existiert, d.h. eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{n} : M^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\longmapsto \mathbf{n}(x) \in N_x M \subset \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

mit $\|\mathbf{n}(x)\| = 1$ für jedes $x \in M$.

Beweis: (\Rightarrow) Sei M orientiert. Sei $x \in M$ und $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine positiv orientierte Karte um x . $\frac{\partial}{\partial x_1}(x) \times \dots \times \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ bezeichne das Vektorprodukt der kanonischen Basisvektoren der Karte im \mathbb{R}^{n+1} . Dann definieren wir

$$\mathbf{n}(x) := \frac{\frac{\partial}{\partial x_1}(x) \times \dots \times \frac{\partial}{\partial x_n}(x)}{\left\| \frac{\partial}{\partial x_1}(x) \times \dots \times \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right\|}.$$

Entsprechend der Eigenschaften des Vektorproduktes steht der Vektor $\mathbf{n}(x)$ senkrecht auf dem Tangentialraum $T_x M$. Die Definition ist korrekt, d.h. unabhängig von der gewählten positiv orientierten Karte, da für das Vektorprodukt von jeweils n linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ bzw. $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ im \mathbb{R}^{n+1} , die den gleichen n -dimensionalen Unterraum aufspannen, gilt

$$\frac{\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_n}{\|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_n\|} = \frac{\mathbf{b}_1 \times \dots \times \mathbf{b}_n}{\|\mathbf{b}_1 \times \dots \times \mathbf{b}_n\|} \iff (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \sim (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n).$$

Die Abbildung $\mathbf{n} : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ist stetig (sogar glatt), weil die Abbildungen $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i} \circ \varphi$ und $\|\cdot\|$ es sind.

(\Leftarrow) Sei eine stetige Abbildung \mathbf{n} wie oben gegeben. Wir definieren eine Orientierung $\mathcal{O}_M = \{\mathcal{O}_{T_x M}\}_{x \in M}$ auf M^n durch

$$(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{O}_{T_x M} \iff (v_1, \dots, v_n, \mathbf{n}(x)) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{n+1}}. \quad (**)$$

Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte um $x \in M$ mit zusammenhängendem Kartenbereich U . Aus Stetigkeitsgründen hat die Determinante der $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y), \mathbf{n}(y) \right)$$

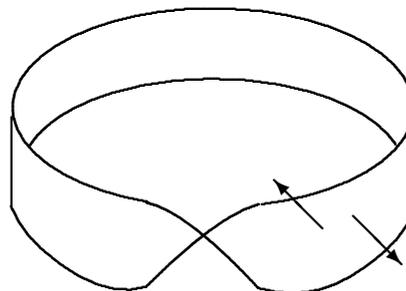
in jedem Punkt $y \in U$ das gleiche Vorzeichen. Ist dies Vorzeichen positiv, so ist die Karte (U, φ) positiv orientiert. Ist dies Vorzeichen negativ, so ersetzt man die Karte (U, φ) durch die Karte $(U, \tilde{\varphi} = (-x_1, x_2, \dots, x_n))$ und erhält dadurch eine positiv orientierte Karte. Folglich definiert $(**)$ tatsächlich eine Orientierung von M . \square

Beispiel 1: Die Sphäre

Die n -dimensionale Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist orientierbar, denn die Abbildung $\mathbf{n} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, definiert durch $\mathbf{n}(x) = \frac{x}{\|x\|}$, ist ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld auf S^n .

Beispiel 2: Das Möbiusband

Nimmt man ein langes Band, verdreht eines der Enden einmal und klebt es dann zusammen, so entsteht das sogenannte Möbiusband im \mathbb{R}^3 . Dies ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand, die nicht orientierbar ist. Um das zu sehen, betrachtet man die Mittellinie, die um das Möbiusband herumläuft. Nimmt man einen beliebigen Normalenvektor in einem Punkt dieser Mittellinie und schlenkert entlang der Mittellinie einmal um das Möbiusband herum, wobei man den Normalenvektor stetig mitführt, so landet man im Ausgangspunkt beim negativen Normalenvektor. Es kann also kein stetiges Normalenfeld geben.



Beispiel 3: Gleichungsdefinierte Hyperflächen

Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Abbildung, $M = F^{-1}(0)$ und $dF_x \neq 0$ für alle $x \in M$. Dann ist M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} . Für den Normalenraum gilt $N_x M = \mathbb{R} \cdot \text{grad} F(x)$ (siehe Abschnitt 11.2). Die Hyperfläche M ist orientierbar, denn durch

$$\mathbf{n}(x) := \frac{\text{grad} F(x)}{\|\text{grad} F(x)\|}$$

ist ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld auf M gegeben.

10.7 Die induzierte Riemannsche Metrik einer Untermannigfaltigkeit

Wie im \mathbb{R}^n möchte man auch auf Untermannigfaltigkeiten "Geometrie betreiben", d.h. z.B. Längen von Kurven, Abstände zwischen Punkten oder Volumen von Teilmengen definieren und berechnen können. Grundlegend für alle geometrischen Begriffe und Untersuchungen ist der Begriff der Riemannschen Metrik. Aus der Riemannschen Metrik kann man alles andere definieren und herleiten. Man kann sehr verschiedene Riemannsche Metriken auf Mannigfaltigkeiten definieren. Für die Untermannigfaltigkeiten, die in diesem Kapitel studiert werden, beschränken wir uns auf die sogenannte "induzierte Riemannsche Metrik", die aus dem Euklidischen Skalarprodukt des Einbettungsraumes entsteht.

Sei M^n eine Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^N . Auf dem \mathbb{R}^N ist das Euklidische Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := \sum_{i=1}^N a_i \cdot b_i \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N), \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$$

gegeben. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert ein Skalarprodukt auf jedem Unterraum $T_x M \subset \mathbb{R}^N$.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ das Skalarprodukt

$$g_x(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Die Familie $g = \{g_x\}_{x \in M}$ dieser Skalarprodukte heißt induzierte Riemannsche Metrik auf M .

Definition. Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte auf M um x . Wir betrachten die symmetrische, positiv-definite $(n \times n)$ -Matrix

$$(g_{ij}(x))_{i,j} := \left(g_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right) \right)_{i,j} = \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right\rangle \right)_{i,j}.$$

Die Funktionen $g_{ij} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißen lokale Koeffizienten der Metrik g bezüglich der Karte (U, φ) .

Beispiel 1: Die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik in Euklidischen Koordinaten: Sei M eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Wir betrachten auf M die Karte, die durch die Euklidischen Koordinaten gegeben wird: $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$. Für die kanonische Basis gilt dann $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = e_i \in T_x M = \mathbb{R}^n$. Folglich gilt

$$g_{ij}(x) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

das heißt die Matrix der Metrik ist die Einheitsmatrix $(g_{ij}(x)) = I_n$.

Beispiel 2: Die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik in Polarkoordinaten:

Wir betrachten Polarkoordinaten auf \mathbb{R}^2 .

Sei $\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^2$ die Parametrisierung durch Polarkoordinaten

$$\Phi(r, u) = (r \cos u, r \sin u)$$

Für die Karte (U, Φ^{-1}) gilt dann in $x = \Phi(r, u)$

$$\frac{\partial}{\partial r}(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, u) = (\cos u, \sin u) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial u}(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(r, u) = (-r \sin u, r \cos u).$$

Somit erhält man

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}(x), \frac{\partial}{\partial r}(x) \right\rangle = 1, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial r}(x), \frac{\partial}{\partial u}(x) \right\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial u}(x), \frac{\partial}{\partial u}(x) \right\rangle = r^2.$$

Die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik in Polarkoordinaten hat folglich die Gestalt

$$(g_{ij}(\Phi(r, u))) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3: Die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik auf der Sphäre S^2 in sphärischen Koordinaten:

Seien $\Phi : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow S^2$ die sphärischen Koordinaten

$$\Phi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v).$$

Dann gilt in $x = \Phi(u, v)$ für die kanonischen Basisvektoren der durch diese Parametrisierung definierten Karte Φ^{-1}

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(x) &= \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) = (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0) \quad , \\ \frac{\partial}{\partial v}(x) &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v) \quad . \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}(x), \frac{\partial}{\partial u}(x) \right\rangle = \cos^2 v, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial u}(x), \frac{\partial}{\partial v}(x) \right\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial v}(x), \frac{\partial}{\partial v}(x) \right\rangle = 1.$$

Die Matrix der induzierten Metrik auf S^2 hat in sphärischen Koordinaten folglich die Gestalt

$$(g_{ij}(\Phi(u, v))) = \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.8 Gradient, Divergenz und Laplace-Operator auf Untermannigfaltigkeiten

Die induzierte Riemannsche Metrik liefert in jedem Tangentialraum $T_x M$ ein nichtausgeartetes positiv definites Skalarprodukt g_x . Mit seiner Hilfe kann man in völliger Analogie zum \mathbb{R}^n den Gradienten von Funktionen, die Divergenz von Vektorfeldern und den Laplace-Operator auf Funktionen auch für Untermannigfaltigkeiten definieren. Diese Begriffe werden später in den Integralsätzen (siehe Abschnitt 10.11.) eine Rolle spielen.

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit M . Dann ist das Differential $df_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung auf dem Euklidischen Vektorraum $(T_x M, g_x)$. Wie man aus der Linearen Algebra weiß, entspricht dieser linearen Abbildung ein eindeutig bestimmter "dualer" Vektor in $T_x M$. Dies definiert den Gradienten von f :

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit mit ihrer induzierten Riemannschen Metrik und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte reellwertige Funktion auf M . Der Gradient von f ist das Vektorfeld

$$\text{grad } f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$$

auf M , das jedem Punkt $x \in M$ den zur Linearform df_x dualen Vektor $\text{grad } f(x) \in T_x M$ zuordnet, d.h.:

$$g_x(\text{grad } f(x), \mathbf{a}) := df_x(\mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{a} \in T_x M.$$

Der folgende Satz gibt die lokale Darstellung des Gradienten in der kanonischen Basis einer Karte an und zeigt insbesondere die Glattheit der Abbildung $\text{grad } f$.

Satz 10.18 Sei $f \in C^\infty(M^n)$ und $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte von M . Es bezeichne $\hat{f} := f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ die Kartendarstellung von f und $(g^{ij}(x))$ die inverse Matrix zu $(g_{ij}(x)) = \left(g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right)\right)$. Dann gilt über dem Kartenbereich U

$$\text{grad } f|_U = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \cdot \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} \circ \varphi\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j},$$

Beweis: Wir berechnen für $x \in U$ und jedes $\alpha \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} df_x\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x)\right) &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\alpha}(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) \delta_{i\alpha} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot g^{ij}(x) \cdot g_{j\alpha}(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot g^{ij}(x) \cdot g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(x), \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x)\right) \\ &= g_x\left(\sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x) \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(x), \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x)\right). \end{aligned}$$

Andererseits ist nach Definition

$$g_x\left(\text{grad } f(x), \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x)\right) = df_x\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x)\right).$$

Die Behauptung folgt dann aus der Nichtausgeartettheit des Skalarprodukts. \square

Beispiel 1: Der Gradient einer Funktion in Euklidischen Koordinaten:

Sei U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung. Wir bestimmen die Darstellung des Gradienten von f in der durch die Euklidischen Koordinaten gegebenen Karte $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$. Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, ist die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik bezüglich dieser Karte die Einheitsmatrix: $(g_{ij}(x)) = (g^{ij}(x)) = I_n$ und $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = e_i$. Für den Gradienten gilt also in Euklidischen Koordinaten

$$\text{grad } f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

Beispiel 2: Der Gradient von $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten:

Es sei $\Phi(r, u) := (r \cos u, r \sin u)$ die Parametrisierung durch Polarkoordinaten. Im letzten Abschnitt haben wir die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik in der durch diese Parametrisierung gegebenen Karte Φ^{-1} bestimmt. Sei $x = \Phi(r, u)$ und bezeichne zur Abkürzung $\hat{f} := f \circ \Phi$ die Kartendarstellung von f . Dann gilt

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (g^{ij}(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

und

$$\text{grad } f(x) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r}(r, u) \cdot \frac{\partial}{\partial r}(x) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \hat{f}}{\partial u}(r, u) \cdot \frac{\partial}{\partial u}(x).$$

Beispiel 3: Der Gradient einer Funktion $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in sphärischen Koordinaten:

Es sei $\Phi(u, v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ die lokale Parametrisierung der Sphäre durch sphärische Koordinaten. Sei $x = \Phi(u, v)$ und $\hat{f} = f \circ \Phi$ die Kartendarstellung von f in diesen Koordinaten. Für die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik in der durch die sphärischen Koordinaten definierten Karte gilt entsprechend dem vorigen Abschnitt

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (g^{ij}(x)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 v} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Gradienten gilt folglich

$$\text{grad } f(x) = \frac{1}{\cos^2 v} \frac{\partial \hat{f}}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial}{\partial u}(x) + \frac{\partial \hat{f}}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial}{\partial v}(x).$$

Der Gradient ordnet jeder Funktion auf M ein Vektorfeld zu. Als nächstes betrachten wir den umgekehrten Prozess. Wir ordnen jedem Vektorfeld eine Funktion zu.

Definition. Sei X ein glattes Vektorfeld auf der Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^N$. Die Divergenz von X ist die Funktion $\text{div}(X) \in C^\infty(M)$, die jedem Punkt $x \in M$ die Zahl

$$\text{div}(X)(x) := \sum_{i=1}^n \langle a_i(X), a_i \rangle,$$

zuordnet, wobei (a_1, \dots, a_n) eine orthonormale Basis im Euklidischen Vektorraum $(T_x M, g_x)$ ist und $a_i(X) \in \mathbb{R}^N$ die Richtungsableitung der Abbildung $X : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ in Richtung des Vektors a_i bezeichnet.

Man überzeugt sich schnell davon, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der orthonormalen Basis (a_1, \dots, a_n) ist. Somit ist $\text{div}(X)$ korrekt definiert.

Wir wollen auch die Divergenz durch lokale Koordinaten beschreiben. Um dies zu tun, beweisen wir zunächst ein hilfreiches Lemma

Lemma. Sei $U : I \subset \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ eine differenzierbare Abbildung mit Werten in der Gruppe der invertierbaren Matrizen. Dann gilt

$$\frac{d}{ds} \ln(\det U(s)) = \text{Spur}(U^{-1}(s) \circ U'(s)) \quad \text{für alle } s \in I.$$

Beweis: Aus der Vorlesung Analysis II* kennen wir das Differential der Determinatenfunktion (siehe Kapitel 6.1). In der Einheitsmatrix $E \in GL(n, \mathbb{R})$ gilt

$$D(\det)_E(X) = \text{Spur}(X) \quad \text{für alle Matrizen } X \in M(n, \mathbb{R}). \quad (*)$$

Aus der Kettenregel folgt dann für $s_0 \in I$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\ln(\det(U(s))) \right) \Big|_{s=s_0} &\stackrel{KR}{=} \frac{1}{\det(U(s_0))} \cdot \frac{d}{ds} \left(\det [U(s_0) \circ U(s_0)^{-1} \circ U(s)] \right) \Big|_{s=s_0} \\ &= \frac{d}{ds} \left(\det [U(s_0)^{-1} \circ U(s)] \right) \Big|_{s=s_0} \\ &\stackrel{KR}{=} D(\det)_E [U(s_0)^{-1} \circ U'(s_0)] \\ &\stackrel{(*)}{=} \text{Spur} [U(s_0)^{-1} \circ U'(s_0)]. \end{aligned}$$

□

Folgerung. Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte einer Untermannigfaltigkeit M und bezeichne $G := (g_{ij}) : U \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik bzgl. dieser Karte. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\ln \det(G)) = \text{Spur} \left(G^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x_i} (G) \right).$$

Beweis: Wir betrachten die i -te Koordinatenlinie $\gamma_i : I \rightarrow U$ durch $x \in U$ mit $\gamma_i(0) = x$ und $\gamma_i'(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$. Dann gilt $\frac{\partial}{\partial x_i}(G)(x) = \frac{d}{ds}(G(\gamma_i(s)))|_{s=0}$ und die Behauptung folgt durch Anwendung des gerade bewiesenen Lemmas auf die Matrizenkurve $s \in I \rightarrow U(s) := G(\gamma_i(s))$. \square

Wir beweisen jetzt folgende lokale Formel für die Divergenz eines Vektorfeldes, die auch die Glattheit von $\text{div}(X)$ zeigt:

Satz 10.19 Sei X ein glattes Vektorfeld auf einer Untermannigfaltigkeit M . Wir betrachten in einer Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ von M die lokale Darstellung $X|_U = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ von X , die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik $(g_{ij}(x)) = \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right\rangle \right)$ und ihre inverse Matrix $(g^{ij}(x)) := (g_{ij}(x))^{-1}$. Desweiteren bezeichne $\theta(x) := \det(g_{ij}(x))$ die Determinante von $(g_{ij}(x))$. Dann gilt über dem Kartenbereich U

$$\text{div}(X)|_U = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\xi^i \sqrt{\theta}).$$

Beweis: Sei $x \in U$ und $(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x))$ die durch die gegebene Karte induzierte kanonische Basis in $T_x M$. Wir orthonormieren diese Basis mit dem Erhard-Schmidtschen Orthonormierungsverfahren und erhalten eine ON-Basis $(a_1(x), \dots, a_n(x))$ in $(T_x M, g_x)$. Die Vektoren $a_i(x)$, $x \in U$, definieren ein glattes Vektorfeld $a_i \in \mathfrak{X}(U)$. Es gilt $a_i(x) = \sum_{k=1}^n A_{ki}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(x)$ für eine Matrix $A(x) = (A_{ki}(x))$. Sei weiterhin E die Einheitsmatrix und $G(x) := (g_{ij}(x))$. Die Matrizen $G(x)$ und $A(x)$ hängen folgendermaßen zusammen:

$$E = (g(a_i, a_j)) = \left(\sum_{k,l=1}^n A_{ki} g_{kl} A_{lj} \right) = A^t \circ G \circ A, \quad \text{also } G^{-1} = A \circ A^t.$$

Insbesondere gilt

$$g^{ij} = (A \circ A^t)_{ij}. \quad (*)$$

Für die Divergenz erhalten wir nach Definition

$$\begin{aligned} \text{div}(X)|_U &= \sum_{i=1}^n \langle a_i(X), a_i \rangle = \sum_{i,k,l=1}^n A_{ki} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}(X), \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle A_{li} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n A_{ki} A_{li} \right) \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}(X), \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^n (A \circ A^t)_{kl} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}(X), \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle \stackrel{(*)}{=} \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}(X), \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle. \end{aligned}$$

Nun setzen wir für X die Basisdarstellung $X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ein und benutzen die Rechenregeln für die Richtungsableitung. Außerdem werden wir in der folgenden Rechnung die Vertauschbarkeit der Richtungsableitungen von kanonischen Basisfeldern entsprechend der Formel

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = 0$$

benutzen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X)|_U &= \sum_{j,k,l=1}^n g^{kl} \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}(\xi_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle + \xi_j \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right), \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle \right) \\ &= \sum_{j,k,l=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_k}(\xi_j) g^{kl} g_{jl} + \xi_j g^{kl} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right), \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\xi_j) + \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right), \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle \quad (**), \end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile im 2. Summanden die Indizes j und k entsprechend dem oben gesagten vertauscht haben. Den 2. Summanden formen wir weiter um. Dazu zerlegen wir ihn in zwei gleiche Teile und benennen im 2. Teil die Indizes k und l um. Außerdem benutzen wir die Symmetrie der Metrik, die Ableitungsregel für das Skalarprodukt von vektorwertigen Funktionen und die vorhergehende Folgerung aus.

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right), \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right), \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^n g^{lk} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right), \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right), \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^n g^{kl} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{kl}) = \frac{1}{2} \operatorname{Spur} \left(G^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x_j} (G) \right) \\ &\stackrel{\text{Folg.}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\ln(\det G)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\ln(\theta)) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\ln \sqrt{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sqrt{\theta}) \end{aligned}$$

Mit (**) folgt schließlich

$$\operatorname{div}(X)|_U = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\xi_j) + \frac{1}{\sqrt{\theta}} \cdot \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{\theta}) \right] = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{\theta} \cdot \xi_j).$$

□

Wir betrachten auch wieder unsere 3 Beispiele:

Beispiel 1: Die Divergenz eines Vektorfeldes in Euklidischen Koordinaten:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ die Euklidischen Koordinaten. Dann ist eine orthonormale Basis im Tangentialraum von x gegeben durch $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. Sei X ein Vektorfeld auf U mit $X = (\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Dann gilt

$$\operatorname{div}(X)(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i(X), e_i \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n e_i(\xi_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}(x).$$

Beispiel 2: Die Divergenz eines Vektorfeldes auf \mathbb{R}^2 in Polarkoordinaten:

Sei $\Phi(r, u) = (r \cos u, r \sin u)$ die Parametrisierung durch Polarkoordinaten, $x = \Phi(r, u)$ und $X(x) = \xi_1(r, u) \frac{\partial}{\partial r}(x) + \xi_2(r, u) \frac{\partial}{\partial u}(x)$. Es gilt $\theta(x) = r^2$. Folglich ist

$$\operatorname{div}(X)(x) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r\xi_1)}{\partial r}(r, u) + \frac{\partial(r\xi_2)}{\partial u}(r, u) \right) = \frac{\partial \xi_1}{\partial r}(r, u) + \frac{1}{r} \xi_1(r, u) + \frac{\partial \xi_2}{\partial u}(r, u).$$

Beispiel 3: Die Divergenz eines Vektorfeldes X auf der Sphäre S^2 in sphärischen Koordinaten:

Sei $\Phi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ die Parametrisierung durch sphärische Koordinaten, $x = \Phi(u, v)$ und $X(x) = \xi_1(u, v) \frac{\partial}{\partial u}(x) + \xi_2(u, v) \frac{\partial}{\partial v}(x)$ die lokale Darstellung des Vektorfeldes X in den sphärischen Koordinaten. Dann gilt $\theta(x) = \cos^2 v$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X)(x) &= \frac{1}{\cos v} \left(\frac{\partial(\cos v \xi_1)}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial(\cos v \xi_2)}{\partial v}(u, v) \right) \\ &= \frac{\partial \xi_1}{\partial u}(u, v) - \frac{\sin v}{\cos v} \xi_2(u, v) + \frac{\partial \xi_2}{\partial v}(u, v). \end{aligned}$$

Als letztes definieren wir den Laplace-Operators für Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte reellwertige Funktion auf M . Δ sei der folgende Operator auf $C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} \Delta : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \operatorname{div}(\operatorname{grad} f). \end{aligned}$$

Der Operator Δ heißt Laplace-Operator.

In lokalen Koordinaten läßt sich der Laplace-Operator folgendermaßen ausdrücken.

Satz 10.20 Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte auf M und $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt mit den gleichen Bezeichnungen wie in Satz 10.19

$$\Delta(f)|_U = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \cdot g^{ij} \right).$$

Beweis: Gemäß Definition ist $\Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$. Aus den Sätzen 10.18 und 10.19 (lokale Darstellung von div und grad) folgt über dem Kartenbereich U

$$\begin{aligned} \Delta(f)|_U &= \operatorname{div} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{\theta} \sum_{i=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{\theta} \frac{\partial}{\partial x_i}(f) g^{ij} \right). \end{aligned}$$

□

Beispiel 1: Der Laplace-Operator in Euklidischen Koordinaten:

Sei $M = \mathbb{R}^n$ und seien $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ die Euklidischen Koordinaten. Dann gilt

$$\Delta(f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

Beispiel 2: Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten auf \mathbb{R}^2 :

Seien $\Phi(r, u) = (r \cos u, r \sin u)$ die Polarkoordinaten, $x = \Phi(r, u)$ und $\hat{f} := f \circ \Phi$ die Kartendarstellung von f . Dann gilt

$$\Delta(f)(x) = \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial r^2}(r, u) + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{f}}{\partial r}(r, u) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial u^2}(r, u).$$

Beispiel 3: Der Laplace-Operator auf S^2 in sphärischen Koordinaten.

Sei $\Phi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ die Parametrisierung durch sphärische Koordinaten, $x = \Phi(u, v)$ und $\hat{f} := f \circ \Phi$ die Kartendarstellung der Funktion f in den sphärischen Koordinaten. Dann gilt

$$\Delta(f)(x) = \frac{1}{\cos^2 v} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial v^2}(u, v) - \tan v \frac{\partial \hat{f}}{\partial v}(u, v).$$

Abschließend beweisen wir einige Produktregeln für den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator.

Satz 10.21 (Produktregeln) Sei M eine Untermannigfaltigkeit, $f, h \in C^\infty(M)$ und X ein glattes Vektorfeld auf M . Dann gilt

1. $\text{grad}(f \cdot h) = f \cdot \text{grad}(h) + h \cdot \text{grad}(f)$,
2. $\text{div}(f \cdot X) = f \cdot \text{div}(X) + X(f)$,
3. $\Delta(f \cdot h) = f \cdot \Delta(h) + h \cdot \Delta(f) + 2\langle \text{grad}(f), \text{grad}(h) \rangle$.

Beweis: 1.) Sei Y ein beliebiges Vektorfeld auf M . Für die Richtungsableitung gilt dann

$$\langle \text{grad}(f \cdot h), Y \rangle = Y(f \cdot h) = h \cdot Y(f) + f \cdot Y(h) = \langle h \cdot \text{grad}(f) + f \cdot \text{grad}(h), Y \rangle.$$

Die Behauptung folgt aus der Nichtausgeartettheit der durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Riemannschen Metrik auf den Tangentialräumen von M .

2.) Wir wählen ein lokales orthonormales Basisfeld (a_1, \dots, a_n) über einem Kartengebiet $U \subset M$. Dann läßt sich das Vektorfeld X über U in dieser Basis durch $X|_U := \sum_{i=1}^n \langle X, a_i \rangle a_i$ ausdrücken. Über der beliebig gewählten Karte U gilt dann nach den Produktregeln für die Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \text{div}(f \cdot X) &= \sum_{i=1}^n \langle a_i(f \cdot X), a_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a_i(f) \cdot X + f \cdot a_i(X), a_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle X, a_i \rangle a_i(f) + f \cdot \langle a_i(X), a_i \rangle \\ &= X(f) + f \cdot \text{div}(X). \end{aligned}$$

3.) Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta(f \cdot h) &= \text{div}(\text{grad}(f \cdot h)) \stackrel{1.)}{=} \text{div}(h \cdot \text{grad}(f) + f \cdot \text{grad}(h)) \\ &\stackrel{2.)}{=} \text{grad}(f)(h) + h \cdot \Delta f + \text{grad}(h)(f) + f \cdot \Delta h \\ &= 2\langle \text{grad}(h), \text{grad}(f) \rangle + h \cdot \Delta f + f \cdot \Delta h. \end{aligned}$$

□

10.9 Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten

Auf die gleiche Weise wie bei den Vektorfeldern und Orientierungen kann man auch die alternierenden multilinearen Abbildungen von Vektorräumen auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Man erhält die sogenannten Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten, die wir in diesem Abschnitt definieren und behandeln wollen. Mittels dieser Differentialformen werden wir in den darauf folgenden Abschnitten Maße für orientierte Mannigfaltigkeiten definieren und die Eigenschaften der dadurch entstehenden Integrale untersuchen. Differentialformen spielen eine wichtige Rolle bei der Modellierung mathematischer und physikalischer Probleme. Man kann mit ihrer Hilfe z.B. Krümmungen in der Geometrie beschreiben oder auch analytische Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten charakterisieren.

10.9.1 Algebraische Vorbereitungen

Bevor wir die Differentialformen definieren, stellen wir einige Begriffe und Fakten aus der Linearen Algebra zusammen.

Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Eine *alternierende k -Form auf V* ist eine Abbildung $\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

1. ω ist *multilinear*, d.h. linear in jeder Komponente, und
2. ω ist *alternierend*, d.h. es gilt

$$\omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \text{sgn}(\pi) \cdot \omega(v_1, \dots, v_k)$$

für jede Permutation $\pi \in S_k$ und alle Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$.

Insbesondere ändert sich das Vorzeichen, wenn man zwei in ω eingesetzte Vektoren vertauscht.

Mit $\Lambda^k V^*$ bezeichnet man den Vektorraum der alternierenden k -Formen auf V . Die Zahl k heißt *der Grad der alternierenden Form* $\omega \in \Lambda^k V^*$ und wird mit $\text{deg}(\omega)$ bezeichnet. Für die 1-Formen gilt $\Lambda^1 V^* = V^*$.

Durch die folgende Operation kann man zwei alternierenden Multilinearformen eine neue solche Form zuordnen:

$$\begin{aligned} \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* &\longrightarrow \Lambda^{k+l} V^* \\ (\omega, \sigma) &\longmapsto \omega \wedge \sigma \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \sigma)(v_1, v_2, \dots, v_{k+l}) &:= \frac{1}{k! \cdot l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \text{sgn}(\pi) \cdot \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot \sigma(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) \\ &= \sum_{\substack{\pi \in S_{k+l}, \\ \pi(1) < \dots < \pi(k), \\ \pi(k+1) < \dots < \pi(k+l)}} \text{sgn}(\pi) \cdot \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot \sigma(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}). \end{aligned}$$

(S_{k+l} bezeichnet hier die Gruppe der Permutationen der Zahlen $1, \dots, k+l$.)

$\omega \wedge \sigma$ heißt das *alternierende Produkt* oder das *wedge-Produkt* von ω und σ . Es gilt

- a) \wedge ist bilinear,
- b) \wedge ist assoziativ,
- c) $\omega \wedge \sigma = (-1)^{\text{deg}(\omega) \cdot \text{deg}(\sigma)} \sigma \wedge \omega$.

Insbesondere gilt für 1-Formen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma \in \Lambda^1 V^*$: $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = -\sigma_2 \wedge \sigma_1$ und $\sigma \wedge \sigma = 0$.

Sei $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ eine Basis in V und bezeichne $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$ die dazu duale Basis in V^* , d.h. es gelte $\sigma^i(a_j) = \delta_{ij}$. Für $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ ist $\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k}$ eine alternierende k -Form, die verschwindet, wenn zwei der Indizes gleich sind. Sind alle Indizes i_1, \dots, i_k voneinander verschieden, so gilt

$$(\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k})(a_{j_1}, \dots, a_{j_k}) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\pi) & \text{wenn } \pi := \begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{pmatrix} \text{ Permutation} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für zwei k -Formen $\omega, \sigma \in \Lambda^k V^*$ erhält man aus den Eigenschaften multilinear und alternierend:

$$\omega = \sigma \iff \omega(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = \sigma(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \quad \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$$

Insbesondere kann man jede k -Form $\omega \in \Lambda^k V^*$ in der Form

$$\omega = \sum_{I=(1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)} \omega(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \cdot \sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k} \quad (*)$$

darstellen. Die k -Formen

$$\{\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

bilden somit eine Basis im Vektorraum der k -Formen $\Lambda^k V^*$. Insbesondere ist die Dimension des Raumes der k -Formen eines n -dimensionalen Vektorraumes durch $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$ zu berechnen. Die Zahlen $\omega(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) =: \omega_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$ in der Basisdarstellung (*) heißen Komponenten von ω bezüglich der Basis $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$.

Wir werden im folgenden oft die folgende Abkürzung benutzen:

Ist $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$ ein geordneter Multiindex. Dann bezeichne

$$\omega_I := \omega(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \quad \text{und} \quad \sigma^I := \sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k}.$$

Wir schreiben also die Basisdarstellung von ω in der Kurzform

$$\omega = \sum_I \omega_I \sigma^I.$$

Abschließend erinnern wir noch an die folgende Rechenregel für n -Formen eines n -dimensionalen Vektorraumes:

Sei $\omega \in \Lambda^n V^*$ eine n -Form auf einem n -dimensionalen Vektorraum V , seien (a_1, \dots, a_n) und (b_1, \dots, b_n) Basen in V und bezeichne $B = (B_{ij})$ die Übergangsmatrix zwischen diesen Basen, d.h. $a_j = \sum_i B_{ij} b_i$. Dann gilt

$$\omega(a_1, \dots, a_n) = \det(B) \cdot \omega(b_1, \dots, b_n).$$

10.9.2 Differentialformen und der Lokalisierungssatz

Wir wollen nun diese alternierenden Multilinearformen von Vektorräumen auf Untermannigfaltigkeiten M übertragen. Dazu liegt es nahe, wie bei den Vektorfeldern und den Orientierungen, Familien von alternierenden Multilinearformen in den Tangentialräumen $T_x M$ von M zu betrachten, die in einem noch zu präzisierenden Sinne glatt vom Fußpunkt x abhängen.

Definition. Eine Familie $\{\omega_x\}_{x \in M}$ von alternierenden k -Formen $\omega_x \in \Lambda^k T_x^* M$ heißt *glatt*, falls die Funktion

$$x \in M \longrightarrow \omega_x(X_1(x), \dots, X_k(x)) \in \mathbb{R}$$

glatt ist für alle glatten Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$.

Wir werden diese glatten Familien von alternierenden k -Formen jetzt auf eine andere Weise beschreiben und mit dem Lokalisierungssatz dann feststellen, dass es sich um die gleichen Objekte handelt.

Definition. Eine Differentialform vom Grad k (kurz k -Form) auf einer Untermannigfaltigkeit M ist eine Abbildung

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{k\text{-mal}} \longrightarrow C^\infty(M),$$

mit den Eigenschaften:

1. ω ist additiv in jeder Komponente,
2. $\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, fX_i, X_{i+1}, \dots, X_k) = f \cdot \omega(X_1, \dots, X_k)$,
wobei $f \in C^\infty(M)$, $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ und $i \in \{1, \dots, k\}$,
3. $\omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) = \text{sgn}(\pi) \cdot \omega(X_1, \dots, X_k)$
für alle $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ und alle Permutationen $\pi \in S_k$.

ω ist also alternierend und $C^\infty(M)$ -multilinear.

Den Raum aller k -Formen von M bezeichnen wir mit $\Omega^k(M)$. Außerdem setzen wir $\Omega^0(M) := C^\infty(M)$. $\Omega^k(M)$ ist ein Modul über dem Ring der glatten Funktionen $C^\infty(M)$.

Wir sehen uns die Beziehung zwischen den in den obigen Definitionen beschriebenen Objekten zunächst am Beispiel von 1-Formen an.

Beispiel: Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf M . Wir betrachten die folgende 1-Form $df \in \Omega^1(M)$, die durch die Richtungsableitung von f nach Vektorfeldern definiert wird:

$$\begin{aligned} df : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\longmapsto df(X) := X(f). \end{aligned}$$

Die 1-Form $df \in \Omega^1(M)$ heißt das *Differential von f* .

Für jeden Punkt $x \in M$ haben wir andererseits das Differential von f im Punkt x , d.h. die lineare Abbildung $df_x : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$, also ein Element $df_x \in \Lambda^1 T_x^* M$. Die 1-Form df und die glatte Familie der 1-Formen $\{df_x\}_{x \in M}$ entsprechen sich wegen folgender Beziehung

$$(df(X))(x) := X(f)(x) = df_x(X(x)).$$

Dieser Zusammenhang gilt allgemein, wie aus dem folgenden Satz folgen wird.

Satz 10.22 (Lokalisierungssatz für Differentialformen) Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ eine k -Form auf M und $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist der Wert $\omega(X_1, \dots, X_k)(x)$ in einem beliebigen Punkt $x \in M$ durch die Vektoren $X_1(x), \dots, X_k(x)$ in $T_x M$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $x \in M$ ein beliebiger fixierter Punkt und $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte um x mit der kanonischen Basis $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Wir wählen eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ mit $f(x) = 1$ und dem Träger in U . Seien nun X_1, \dots, X_k und $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k$ zwei k -Tupel von Vektorfeldern auf M mit $X_i(x) = \tilde{X}_i(x)$ für jedes $i = 1, \dots, k$. Wir wollen zeigen, daß dann

$$\omega(X_1, \dots, X_k)(x) = \omega(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)(x)$$

gilt. Wir betrachten dazu die folgenden, auf ganz M definierten Vektorfelder Y_1, \dots, Y_n :

$$Y_i := \begin{cases} f \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} & \text{auf } U \\ 0 & \text{auf } M \setminus U \end{cases}$$

Da der Träger der Funktion f in U liegt, sind die Vektorfelder Y_i korrekt definiert und glatt. Die Vektorfelder fX_j bzw. $f\tilde{X}_j$ lassen sich dann in der folgenden Form darstellen

$$fX_j = \sum_{i=1}^n \xi_{ji} Y_i \quad \text{und} \quad f\tilde{X}_j = \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_{ji} Y_i,$$

wobei ξ_{ji} bzw. $\tilde{\xi}_{ji}$ glatte Funktionen auf M sind. Nach Voraussetzung ist $\xi_{ji}(x) = \tilde{\xi}_{ji}(x)$ für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, k$. Nun folgt

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \dots, X_k)(x) &= f^k(x) \cdot \omega(X_1, \dots, X_k)(x) = ((f^k \omega)(X_1, \dots, X_k))(x) \\ &= \omega(fX_1, \dots, fX_k)(x) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \xi_{1i_1}(x) \cdot \dots \cdot \xi_{ki_k}(x) \cdot \omega(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_k})(x) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \tilde{\xi}_{1i_1}(x) \cdot \dots \cdot \tilde{\xi}_{ki_k}(x) \cdot \omega(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_k})(x) \\ &= \omega(f\tilde{X}_1, \dots, f\tilde{X}_k)(x) = \dots = \omega(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)(x). \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von Satz 10.22 erhalten wir eine Beziehung zwischen den Differentialformen $\Omega^k(M)$ und den glatten Familien $\{\omega_x\}_{x \in M}$ von alternierenden k -Formen $\omega_x \in \Lambda^k T_x^* M$.

Satz 10.23 *Es besteht eine bijektive Beziehung zwischen den Differentialformen $\Omega^k(M)$ und den glatten Familien $\{\omega_x\}_{x \in M}$ von alternierenden k -Formen $\omega_x \in \Lambda^k T_x^* M$. Diese bijektive Zuordnung ist folgendermaßen gegeben:*

1. Ist $\omega \in \Omega^k(M)$ eine k -Form auf M , so definieren wir eine glatte Familie $\{\omega_x\}_{x \in M}$ von k -Formen $\omega_x \in \Lambda^k T_x^* M$ durch

$$\omega_x(v_1, \dots, v_k) := \omega(X_1, \dots, X_k)(x), \quad \text{wobei } X_i \in \mathfrak{X}(M) \text{ mit } X_i(x) = v_i \in T_x M.$$

(Der vorstehende Satz besagt, daß $\omega_x(v_1, \dots, v_k)$ korrekt definiert ist, weil unabhängig von Wahl der Fortsetzung der Vektoren v_i durch die Vektorfelder X_i).

2. Sei andererseits $\{\omega_x\}_{x \in M}$ eine glatte Familie von k -Formen $\omega_x \in \Lambda^k T_x^* M$. Dann definieren wir eine k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$ durch

$$\omega(X_1, \dots, X_k)(x) := \omega_x(X_1(x), \dots, X_k(x)), \quad X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M).$$

Definition. Sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge, $\omega \in \Omega^k(M)$ eine k -Form und $\omega \hat{=} \{\omega_x\}_{x \in M}$ die ω entsprechende glatte Familie. Unter der Einschränkung $\omega|_U \in \Omega^k(U)$ von ω auf U versteht man die k -Form, die der glatten Familie $\{\omega_x\}_{x \in U}$ entspricht.

10.9.3 Rechenoperationen für Differentialformen

(1) Zurückziehen von Differentialformen.

Sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte-Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten. Man kann jede Differentialform auf der Bildmannigfaltigkeit N mittels F auf M "zurückziehen".

F induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} F^* : \Omega^k(N) &\longrightarrow \Omega^k(M), \\ \omega &\longmapsto F^*\omega \end{aligned}$$

die folgendermaßen definiert ist: Sei ω eine k -Form auf der Bildmannigfaltigkeit N . Wir definieren die *mittels F induzierte k -Form* $F^*\omega \in \Omega^k(M)$ durch die folgende glatte Familie von k -Formen $\{(F^*\omega)_x\}_{x \in M}$

$$(F^*\omega)_x(v_1, \dots, v_k) := \omega_{F(x)}(dF_x(v_1), \dots, dF_x(v_k)), \quad v_1, \dots, v_k \in T_x M.$$

Für Vektorfelder X_1, \dots, X_k auf M gilt also

$$(F^*\omega)(X_1, \dots, X_k)(x) := \omega_{F(x)}(dF_x(X_1(x)), \dots, dF_x(X_k(x))).$$

Wir bemerken hier, dass für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ und eine surjektive glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ durch die Familie von Vektoren $\{dF_x(X(x))\}_{x \in M}$ im allgemeinen kein Vektorfeld auf N definiert wird.

(2) Das alternierende Produkt.

Wie im Falle der Vektorräume kann man auch für Differentialformen eine Zuordnung definieren, die zwei Differentialformen ω und σ wieder eine Differentialform $\omega \wedge \sigma$, ihr sogenanntes *alternierendes Produkt* oder *wedge-Produkt* zuordnet:

$$\begin{aligned} \wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) &\longrightarrow \Omega^{k+l}(M) \\ (\omega, \sigma) &\longmapsto \omega \wedge \sigma \end{aligned}$$

Seien $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\sigma \in \Omega^l(M)$ mit $k, l > 0$. Dann ist $\omega \wedge \sigma \in \Omega^{k+l}(M)$ wie folgt definiert

$$(\omega \wedge \sigma)(X_1, \dots, X_{k+l}) := \sum_{\substack{\pi \in S_{k+l}, \\ \pi(1) < \dots < \pi(k), \\ \pi(k+1) < \dots < \pi(k+l)}} \text{sgn}(\pi) \omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) \cdot \sigma(X_{\pi(k+1)}, \dots, X_{\pi(k+l)}),$$

Für $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ und $\omega \in \Omega^k(M)$ setzen wir

$$f \wedge \omega = \omega \wedge f := f \cdot \omega.$$

Analog wie für das alternierende Produkt von Multilinearformen in Vektorräumen erhält man die folgenden Eigenschaften des alternierenden Produktes für Differentialformen, die wir dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Satz 10.24 *Das alternierende Produkt \wedge von Differentialformen hat folgende Eigenschaften:*

1. Sind $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\sigma \in \Omega^l(M)$, so ist $\omega \wedge \sigma \in \Omega^{k+l}(M)$.
2. \wedge ist in jeder Komponente $C^\infty(M)$ -linear, d.h.
 $(f\omega) \wedge \sigma = \omega \wedge (f\sigma) = f(\omega \wedge \sigma)$ für $f \in C^\infty(M)$.

3. \wedge ist assoziativ.

4. Sind $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\sigma \in \Omega^l(M)$, so gilt $\omega \wedge \sigma = (-1)^{k \cdot l}(\sigma \wedge \omega)$.

5. Sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $\omega \in \Omega^k(N)$ und $\sigma \in \Omega^l(N)$ zwei Differentialformen auf der Bildmannigfaltigkeit N . Dann gilt

$$F^*(\omega \wedge \sigma) = (F^*\omega) \wedge (F^*\sigma).$$

□

(3) Das innere Produkt.

Sei X ein Vektorfeld auf M . Die Abbildung

$$\begin{aligned} i_X : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \\ \omega &\longmapsto i_X\omega \end{aligned}$$

definiert durch

$$(i_X\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) := \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$$

heißt *inneres Produkt von ω mit dem Vektorfeld X* . Der folgende Satz beschreibt einige Eigenschaften des inneren Produktes. Der Beweis wird durch formales Anwenden der Definitionen geführt (Übungsaufgabe).

Satz 10.25 (Eigenschaften des Inneren Produktes)

1. $i_{fX}\omega = i_X(f\omega) = f \cdot i_X\omega$, wobei $f \in C^\infty(M)$.
2. $i_X(\omega \wedge \sigma) = (i_X\omega) \wedge \sigma + (-1)^{\deg\omega} \omega \wedge (i_X\sigma)$.
3. Sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$ zwei Vektorfelder, die durch F verknüpft sind, d.h. für die $Y(F(x)) = dF_x(X(x))$ für alle $x \in M$ gilt. Ist $\omega \in \Omega^k(N)$, so gilt

$$F^*(i_Y\omega) = i_X(F^*\omega).$$

□

(4) Die lokale Darstellung einer Differentialform.

Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte um $x \in M$, $(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x))$ die von dieser Karte definierte kanonische Basis in T_xM und $((dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x)$ die zugehörige duale Basis in T_x^*M . Dann sind $\frac{\partial}{\partial x_i}$ Vektorfelder auf dem Kartenbereich U , die Differentiale dx_i der Koordinatenfunktionen sind 1-Formen auf U .

Nach Definition gilt für das alternierende Produkt $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$

$$(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \binom{i_1 \dots i_k}{j_1 \dots j_k} & \text{falls } \binom{i_1 \dots i_k}{j_1 \dots j_k} \in S_k \\ 0 & \text{falls } \binom{i_1 \dots i_k}{j_1 \dots j_k} \notin S_k \end{cases}.$$

Wie die Basisdarstellung einer k -Form über einem Vektorraum erhält man die folgende Darstellung einer Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ über dem Kartenbereich U :

$$\omega|_U = \sum_{I=(1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)} \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =: \sum_I \omega_I dx^I, \quad (*)$$

wobei die Funktionen $\omega_I := \omega_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$ durch

$$\omega_{i_1 \dots i_k}(x) = \omega|_U \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \right) (x) = \omega_x \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}(x) \right)$$

gegeben sind.

Wir nennen (*) die *lokale Darstellung von ω bezüglich der Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$* .

Die Abbildungen

$$\omega_{i_1 \dots i_k} \circ (\varphi^{-1}) : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißen *lokale Koeffizienten der Form ω bezüglich (U, φ)* .

Die bisherigen Rechenregeln waren algebraische Rechenregeln, d.h. Regeln, die punktweise gelten. Die folgende Operation beschreibt Ableitungsregeln für Differentialformen.

(5) Das Differential einer k -Form.

In Abschnitt 10.9.2 haben wir bereits das Differential einer glatten Funktion definiert. Dies war die folgende Abbildung, die jeder Nullform (=Funktion) eine 1-Form zuordnet

$$\begin{aligned} d : C^\infty(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ f &\longmapsto df \quad \text{wobei } df(X) := X(f). \end{aligned}$$

Die lokale Darstellung von df bezüglich einer Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ ist gegeben durch

$$df = \sum_{i=1}^n df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) dx^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f) dx^i.$$

Wir definieren jetzt das Differential auf den k -Formen für $k \geq 1$, das jeder k -Form eine $(k+1)$ -Form zuordnet. Die Abbildung

$$\begin{aligned} d : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(M), \\ \omega &\longmapsto d\omega \end{aligned}$$

sei definiert durch

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &:= \sum_{j=0}^k (-1)^j X_j(\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k)) \\ &+ \sum_{0 \leq \alpha < \beta \leq k} (-1)^{\alpha+\beta} \omega([X_\alpha, X_\beta], X_0, \dots, \widehat{X}_\alpha, \dots, \widehat{X}_\beta, \dots, X_k). \end{aligned}$$

(Dabei bedeutet der "Hut" auf einem Eintrag X_i , d.h. \widehat{X}_i , dass das entsprechende Vektorfeld weggelassen wird.)

d heißt *Differential auf dem Raum der k -Formen*, $d\omega$ heißt *Differential von ω* .

Als Spezialfälle erhält man beispielsweise für das Differential von 1- bzw. 2-Formen

1. Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ eine 1-Form. Dann gilt

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

2. Sei $\omega \in \Omega^2(M)$ eine 2-Form. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) \\ &- \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Satz 10.26 (Eigenschaften des Differentials)

1. Die Abbildung $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ ist korrekt definiert und \mathbb{R} -linear.
2. Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ und $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte auf M bezüglich derer ω die lokale Darstellung $\omega|_U = \sum_I \omega_I dx^I$ habe. Dann gilt für die lokale Darstellung von $d\omega$

$$d\omega|_U = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I .$$

3. $d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\sigma$.
4. $dd\omega = 0$ für alle $\omega \in \Omega^k(M)$ und $k \geq 0$.
5. Ist $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $\omega \in \Omega^k(N)$, dann gilt

$$d(F^*\omega) = F^*d\omega .$$

Beweis: Zu 1.) Nach Definition ist d offensichtlich linear. Dass $d\omega$ alternierend ist, folgt aus der Schiefsymmetrie des Kommutators $[\cdot, \cdot]$ und da ω alternierend ist. Die C^∞ -Linearität von $d\omega$ folgt aus den Rechenregeln für den Kommutator aus Satz 10.15. Man benutzt dazu z.B. die Regel $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$. Also ist $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$.

Zu 2.) Die k -Form ω habe die lokale Darstellung

$$\omega|_U = \sum_I \omega_I dx^I .$$

Nach 1.) ist $d\omega$ eine $(k+1)$ -Form, besitzt also eine lokale Darstellung der Form

$$\begin{aligned} d\omega|_U &= \sum_{(J=1 \leq j_0 < \dots < j_k \leq n)} (d\omega) \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_0}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) \cdot dx^J \\ &\stackrel{Def.}{=} \sum_J \left[\sum_{\alpha=0}^k (-1)^\alpha \frac{\partial}{\partial x_{j_\alpha}} \left(\omega \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_0}}, \dots, \frac{\hat{\partial}}{\partial x_{j_\alpha}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) \right) \right] \cdot dx^J + 0, \end{aligned}$$

wobei $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ benutzt wurde. Es folgt durch Vertauschen der Differentiale

$$\begin{aligned} d\omega|_U &= \sum_{J=(I, j_\alpha)} \left[\sum_{\alpha=0}^k \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_\alpha}} (\omega_I) \right) \right] \cdot dx_{j_\alpha} \wedge dx^I = \sum_I \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_I) \cdot dx_j \right] \wedge dx^I \\ &= \sum_I d\omega_I \wedge dx^I . \end{aligned}$$

Zu 3.) Wir dürfen oBdA $\omega = f dx^I$ und $\sigma = g dx^J$ annehmen, da d linear und eine lokale Operation ist. Dann folgt durch die bereits bekannten Rechenregeln für Differentialformen

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= d(f dx^I \wedge g dx^J) = d(fg dx^I \wedge dx^J) \stackrel{2.}{=} d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &\stackrel{PR}{=} (g df + f dg) \wedge dx^I \wedge dx^J \stackrel{10.24}{=} df \wedge dx^I \wedge g dx^J + dg \wedge f dx^I \wedge dx^J \\ &= df \wedge dx^I \wedge \sigma + dg \wedge \omega \wedge dx^J \stackrel{2.}{=} (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\sigma . \end{aligned}$$

Zu 4.) Wir beweisen die Behauptung zunächst für $k = 0$. Sei dazu $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt nach Definition des Differentials und unter Benutzung der Eigenschaften des Kommutators aus Satz 10.15

$$d(df)(X, Y) \stackrel{Def.}{=} X(df(Y)) - Y(df(X)) - df([X, Y]) = X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X, Y](f) = 0 .$$

Sei nun $k \geq 1$ und $\omega \in \Omega^k(M)$ eine k -Form mit der lokaler Darstellung $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$.

Dann gilt

$$d(d\omega) \stackrel{2.}{=} \sum_I d(d\omega^I \wedge dx^I) = \sum_I [d(d\omega^I) \wedge dx^I - d\omega^I \wedge d(dx^I)].$$

Da $\omega^I \in C^\infty(M)$ und $dx^I = dx_{i_k} \wedge \dots \wedge dx_{i_1}$ ist, folgt $d(d\omega) = 0$ aus dem Fall $k = 0$ und unter Anwendung von 3.).

Zu 5.) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über den Grad von ω . Sei $k = 0$ und $f \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$. Dann gilt $(F^*f)(x) = f(F(x))$. Also folgt

$$d(F^*f)_x(v) = d(f \circ F)_x(v) \stackrel{KR}{=} (df)_{F(x)}(dF_x(v)) = (F^*df)_x(v),$$

d.h. $d(F^*f) = F^*df$.

Wir setzen nun voraus, dass die Behauptung bereits für k -Formen bewiesen ist und schließen auf $(k+1)$ -Formen. Sei also ω eine $(k+1)$ -Form. Wie oben dürfen wir oBdA annehmen, daß $\omega = f dx^J$ gilt, wobei J ein geordneter Multiindex $J = (1 \leq j_0 < \dots < j_k \leq n)$ ist. In der folgenden Rechnung bezeichnet I den Multiindex $I = (j_0 < \dots < j_{k-1})$. Dann erhalten wir aus den schon bekannten Rechenregeln und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= d(F^*(f dx^J)) = d(F^*[(f dx_{j_0} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}) \wedge dx_{j_k}]) \\ &\stackrel{10.24}{=} d(F^*(f dx^I) \wedge F^*dx_{j_k}) \\ &\stackrel{3.}{=} d(F^*(f dx^I)) \wedge F^*dx_{j_k} + (-1)^k F^*(f dx^I) \wedge d(F^*dx_{j_k}) \\ &\stackrel{1. Vor.}{=} F^*(d(f dx^I)) \wedge F^*dx_{j_k} + (-1)^k F^*(f dx^I) \wedge (dF^*x_{j_k}) \\ &\stackrel{4. \& 10.24}{=} F^*(d(f dx^I) \wedge dx_{j_k}) \stackrel{3.}{=} F^*(d(f dx^I \wedge dx_{j_k})) = F^*d\omega. \end{aligned}$$

□

Die Beziehung zwischen Differential und innerem Produkt fehlt in der Liste von Satzes 10.26.

Sie führt auf den Begriff der *Lie-Ableitung einer Differentialform*.

Sei X ein Vektorfeld auf M . Die Abbildung

$$\begin{aligned} L_X : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^k(M) \\ \omega &\longmapsto L_X\omega \end{aligned}$$

definiert durch

$$L_X\omega := di_X\omega + i_Xd\omega$$

heißt *Lie-Ableitung von ω nach dem Vektorfeld X* .

10.9.4 Geschlossene und exakte Differentialformen

Definition. Eine k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$. Eine k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt *exakt*, wenn eine $(k-1)$ -Form $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ existiert, so daß $d\eta = \omega$.

Da $d \circ d = 0$, ist jede exakte Differentialform geschlossen.

Beispiel 1: Wir betrachten die folgende 1-Form ω auf $M = \mathbb{R}^2$ in Euklidischen Koordinaten (x, y) :

$$\omega = y dx + x dy.$$

a) ω ist geschlossen, da

$$d\omega = dy \wedge dx + dx \wedge dy = -dx \wedge dy + dx \wedge dy = 0.$$

b) ω ist exakt, da für die Funktion $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\phi(x, y) := x \cdot y$ gilt

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = y dx + x dy = \omega.$$

Beispiel 2: Wir betrachten eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit Euklidischen Koordinaten (x, y) und eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(U)$

$$\omega = P dx + Q dy, \quad \text{wobei } P, Q \in C^\infty(U).$$

Mit den Regeln $dx \wedge dx = 0$, $dy \wedge dy = 0$, $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ erhalten wir

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$d\omega = 0 \iff \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Andererseits ist ω exakt, d.h. es gibt eine glatte Funktion $\phi \in C^\infty(U)$ mit $d\phi = \omega$, genau dann wenn

$$\omega = P dx + Q dy = d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy,$$

also

$$P = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{und} \quad Q = \frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (*)$$

Beispiel 3: Auf \mathbb{R}^2 ist jede geschlossene 1-Form $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ auch exakt:

Um eine Funktion $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $d\phi = \omega$ zu finden, integrieren wir die Funktion $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ nach der x -Variablen bzw. $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ nach der y -Variablen und benutzen das Kriterium (*):

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \int_0^x \frac{\partial\phi}{\partial x}(t, y) dt + \phi(0, y) = \int_0^x P(t, y) dt + \phi(0, y) \\ \phi(0, y) &= \int_0^y \frac{\partial\phi}{\partial y}(0, s) ds + \phi(0, 0) = \int_0^y Q(0, s) ds + \phi(0, 0). \end{aligned}$$

Wir setzen deshalb

$$\phi(x, y) := \int_0^x P(t, y) dt + \int_0^y Q(0, s) ds.$$

ϕ ist glatt und erfüllt tatsächlich die Bedingung (*): $P = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Für $Q = \frac{\partial\phi}{\partial y}$ benutzt man zusätzlich, dass ω geschlossen ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y) &= \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(t, y) dt + Q(0, y) \stackrel{d\omega=0}{=} \int_0^x \frac{\partial Q}{\partial x}(t, y) dt + Q(0, y) \\ &= Q(x, y) - Q(0, y) + Q(0, y) = Q(x, y). \end{aligned}$$

Ist die geschlossene 1-Form ω nicht auf ganz \mathbb{R}^2 definiert, so ist sie im allgemeinen nicht exakt! Diese Eigenschaft hängt von der Art des Gebietes $U \subset \mathbb{R}^2$ ab, auf dem ω definiert ist.

Beispiel 4: Die Windungsform.

Wir betrachten die 1-Form $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$:

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \quad (\text{Windungsform}).$$

ω ist geschlossen, was man leicht wie im Beispiel 2 ausrechnet. ω ist aber nicht exakt. Um dies einzusehen betrachten wir die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\gamma_k(t) := (r \cos(kt), r \sin(kt))$$

die k -mal um die Kreislinie vom Radius r herumläuft, wobei $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten das Kurvenintegral von ω über γ :

$$\int_{\gamma} \omega := \int_0^{2\pi} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

Da $\gamma'(t) = (-rk \sin(kt), rk \cos(kt))$ und $\frac{\partial}{\partial x} = e_1$, $\frac{\partial}{\partial y} = e_2$, erhält man

$$\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = -\frac{r \sin(kt)}{r^2}(-rk \sin(kt)) + \frac{r \cos(kt)}{r^2}rk \cos(kt) = k.$$

Es folgt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} k dt = 2\pi k.$$

Das Kurvenintegral von ω über γ zählt also, wie oft γ um die Kreislinie herumläuft. Angenommen ω wäre exakt, d.h. es existiert eine Funktion $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ mit $d\phi = \omega$. Dann wäre

$$\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = d\phi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (\phi \circ \gamma)'(t)$$

und für das Kurvenintegral würde folgen

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (\phi \circ \gamma)'(t) dt = \phi(\gamma(2\pi)) - \phi(\gamma(0)) = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch für $k \in \mathbb{Z}$ und $k \neq 0$.

Wir zeigen nun, dass für *sternförmige* offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ jede geschlossene k -Form $\omega \in \Omega^k(U)$ auch exakt ist. Zur Erinnerung: Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig bzgl. $x_0 \in U$, falls für alle $x \in U$ die Strecke $\overline{x_0 x}$ vollständig in U liegt.

Lemma von Poincare:

Auf einer offenen und sternförmigen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist jede geschlossene k -Form ($k \geq 1$) exakt.

Beweis: Wir geben hier einen direkten Beweis an, der auch das Rechnen mit Differentialformen demonstrieren soll. Wir führen den Beweis in 2. Schritten. Im ersten Schritt werden wir zeigen, dass es ausreicht, die Behauptung für offene und bzgl. dem Nullvektor $o \in \mathbb{R}^n$

sternn6rmige Mengen zu zeigen. Im zweiten Schritt zeigen wir das Lemma von Poincare dann f6r geschlossene k -Formen auf offenen und bzgl. o sternf6rmigen Mengen.

1. Schritt: Angenommen die Behauptung des Lemmas von Poincare gilt f6r jede offene, bzgl. o sternf6rmige Menge im \mathbb{R}^n . Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene und sternf6rmige Menge. U sei sternf6rmig bez6glich $x_0 \in U$. Wir betrachten dann die offene und bzgl. o sternf6rmige Menge

$$\tilde{U} := U - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Sei nun $\omega \in \Omega^k(U)$ geschlossen, d.h. es gelte $d\omega = 0$. Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \phi : \tilde{U} &\rightarrow U \\ x &\mapsto x + x_0 \end{aligned}$$

und ziehen ω mittels ϕ zur6ck. Dann gilt $\phi^*\omega \in \Omega^k(\tilde{U})$ und $d(\phi^*\omega) = \phi^*d\omega = 0$. Entsprechend unserer Annahme existiert dann eine $(k-1)$ -Form $\tilde{\eta} \in \Omega^{k-1}(\tilde{U})$ mit

$$d\tilde{\eta} = \phi^*\omega.$$

F6r die Umkehrabbildung ϕ^{-1} und die dadurch induzierte Form $\eta := (\phi^{-1})^*\tilde{\eta} \in \Omega^{k-1}(U)$ gilt dann:

$$d\eta = d((\phi^{-1})^*\tilde{\eta}) = (\phi^{-1})^*d\tilde{\eta} = (\phi^{-1})^*(\phi^*\omega) = (\phi^{-1})^* \circ \phi^*\omega = \omega.$$

Also ist ω exakt auf U . Daher gen6gt es, die Behauptung des Lemmas von Poincare f6r offene Mengen des \mathbb{R}^n zu zeigen, die den Nullvektor o enthalten und sternf6rmig bzgl. o sind.

2. Schritt: Sei nun $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die den Nullvektor o enth6lt und sternf6rmig bez6glich o ist. Zum Beweis der Behauptung im Lemma von Poincare definieren wir f6r jede Stufe $k \geq 1$ einen linearen Operator

$$S_k : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$$

und zeigen, dass f6r jede k -Form ω die Formel

$$\omega = S_{k+1}(d\omega) + dS_k(\omega)$$

gilt. Ist ω insbesondere geschlossen, d.h. $d\omega = 0$, so folgt f6r die $(k-1)$ -Form $\eta := S_k(\omega)$, dass $d\eta = \omega$ gilt, und somit das Lemma von Poincare.

Sei ω eine k -Form auf U . Wir stellen ω in den Euklidischen Koordinaten (x_1, \dots, x_n) dar

$$\omega = \sum_{I:=(1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)} \omega_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

wobei

$$\omega_I = \omega|_U \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \right) \in C^\infty(U).$$

Wir definieren die $(k-1)$ -Form $S_k(\omega) \in \Omega^{k-1}(U)$ mittels der Koeffizienten ω_I von ω durch

$$S_k(\omega)_x := \sum_I \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \underbrace{\left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_I(tx) dt \right)}_{=: \theta(x) \in C^\infty} x_{i_\alpha} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Da U sternförmig bezüglich o ist, ist $\omega_I(tx)$ für alle $t \in [0, 1]$ definiert und damit auch die Form $S_k(\omega)$ korrekt gegeben. Offensichtlich ist die Zuordnung $\omega \mapsto S_k(\omega)$ linear. Für das Differential von $S_k(\omega)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
dS_k(\omega)_x &:= \sum_I \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \theta}{\partial x_j}(x) dx_j \right)}_{=d\theta} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_I \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_I(tx) dt \cdot x_{i_\alpha} \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&\stackrel{PR}{=} \sum_I \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx) dt \right) \cdot x_{i_\alpha} \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad + \sum_I \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \cdot \sum_{\beta=1}^k \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_I(tx) dt \right) \cdot dx_{i_\beta} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_I \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx) dt \right) \cdot x_{i_\alpha} \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad + \sum_I \left(\int_0^1 k \cdot t^{k-1} \omega_I(tx) dt \right) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.
\end{aligned}$$

Für das Differential von ω gilt

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_I d\omega_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_I \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j} \cdot dx_j}_{d\omega_I} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}
\end{aligned}$$

Wir ordnen nun der $(k+1)$ -Form $d\omega$ durch die gleiche Prozedur wie oben die k -Form $S_{k+1}(d\omega)$ auf U zu und erhalten:

$$\begin{aligned}
S_{k+1}(d\omega)_x &= \sum_I \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} - \\
&\quad - \sum_I \sum_{\alpha=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}
\end{aligned}$$

Durch Addition der Formeln für $dS_k(\omega)$ und $S_{k+1}(d\omega)$ folgt bei Benutzung der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
dS_k(\omega) + S_{k+1}(d\omega) &= \sum_I \left(\int_0^1 k \cdot t^{k-1} \omega_I(tx) dt \right) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad + \sum_I \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_I \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} (t^k \omega_I(tx)) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_I \omega_I(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= \omega.
\end{aligned}$$

□

Im allgemeinen sind die exakten Differentialformen ein echter Unterraum der geschlossenen Differentialformen:

$$\text{Im } d_{k-1} := d\left(\Omega^{k-1}(M)\right) \subset \text{Ker } d_k := \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\}.$$

Der Faktorraum

$$H_{DR}^k(M) := \text{Ker } d_k / \text{Im } d_{k-1}$$

heißt *k.-deRham-Kohomologiegruppe von M*. Für offene und sternförmige Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ gilt nach dem Lemma von Poincare

$$H_{DR}^k(U) = 0 \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Die DeRham-Kohomologie und ihre Anwendungen in der Analysis und Geometrie werden im Hauptstudium in Vorlesungen über Algebraische Geometrie, Differentialgeometrie bzw. Globale Analysis behandelt. Sie enthalten wesentliche Informationen über analytische Eigenschaften der Mannigfaltigkeit M . Man kann z.B. die DeRham-Kohomologie der Sphäre und der Kugel benutzen, um den Brouwerschen Fixpunktsatz zu beweisen. Wir erwähnen hier ausblickend zwei weitere Anwendungen:

Man kann zeigen, dass die Vektorräume $H_{DR}^k(M)$ für kompakte Mannigfaltigkeiten M endlich-dimensional sind. Deshalb kann man kompakten, n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten die folgende Zahl, die sogenannte *Eulersche Charakteristik*, zuordnen:

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H_{DR}^k(M).$$

Es gilt z.B.

1. Zwei kompakte, orientierbare, zusammenhängende 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind genau dann diffeomorph, wenn ihre Eulersche Charakteristik übereinstimmt.
2. Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M^n existiert genau dann ein globales Vektorfeld ohne Nullstellen, wenn die Eulersche Charakteristik verschwindet: $\chi(M) = 0$.

10.9.5 Die Volumenform einer orientierten Untermannigfaltigkeit

Wie wir in Abschnitt 10.6 gesehen hatten, unterscheidet man orientierbare und nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten.

Wir betrachten in diesem Abschnitt eine orientierte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit (M^n, \mathcal{O}_M) im \mathbb{R}^N mit der induzierten Riemannschen Metrik g und definieren darauf eine spezielle, die Geometrie 'messende' n -Form. Für jedes $x \in M$ ist $(T_x M, \mathcal{O}_{T_x M}, g_x)$ ein n -dimensionaler orientierter Euklidischer Vektorraum.

Definition. Die alternierende n -Form

$$dM_x := \sqrt{\det(g_x(v_i, v_j))} \cdot \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n \in \Lambda^n(T_x^* M),$$

wobei (v_1, \dots, v_n) eine positiv orientierte Basis in $T_x M$ und $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$ die dazu duale Basis in $T_x^* M$ ist, heißt Volumenform von $(T_x M, \mathcal{O}_{T_x M}, g_x)$.

Bemerkungen:

- (1) Die n -Form dM_x ist korrekt definiert, d.h. sie ist unabhängig von der Wahl der orientierten Basis (v_1, \dots, v_n) in $T_x M$.

Um dies einzusehen, betrachten wir eine weitere positiv orientierte Basis (w_1, \dots, w_n) in $T_x M$ mit der dualen Basis (η^1, \dots, η^n) . Dann gilt für den Basisübergang

$$v_i = \sum_{k=1}^n A_{ki} w_k \quad \text{und} \quad \sigma^j = \sum_{l=1}^n (A^{-1})^t_{lj} \eta^l,$$

wobei die Übergangsmatrix $A = (A_{ki})$ eine positive Determinante hat. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \det(g_x(v_i, v_j)) &= \det\left(\sum_{k,l} A_{ki} A_{lj} g_x(w_k, w_l)\right) = \det(A^t \circ (g_x(w_k, w_l)) \circ A) \\ &= \det(A)^2 \cdot \det(g_x(w_k, w_l)), \end{aligned} \quad (*)$$

$$\sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n = \det((A^{-1})^t) \cdot \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^n = (\det(A))^{-1} \cdot \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^n,$$

und somit

$$\sqrt{\det(g_x(v_i, v_j))} \cdot \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n = \sqrt{\det(g_x(w_i, w_j))} \cdot \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^n.$$

(2) Für jede positiv orientierte Basis (v_1, \dots, v_n) in $T_x M$ gilt:

$$dM_x(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\det(g_x(v_i, v_j))}.$$

Dies folgt aus der Formel für das alternierende Produkt. Für die zu (v_1, \dots, v_n) duale Basis $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$ gilt

$$\begin{aligned} (\sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n)(v_1, \dots, v_n) &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \cdot \sigma^1(v_{\pi(1)}) \cdot \dots \cdot \sigma^n(v_{\pi(n)}) \\ &= \sigma^1(v_1) \cdot \dots \cdot \sigma^n(v_n) = 1. \end{aligned}$$

Damit folgt (2) aus der Definition von dM_x .

(3) *Geometrische Interpretation der Volumenform:*

Für $n = 1$ beschreibt $dM_x(v)$ die Länge des Vektors v :

$$dM_x(v) = \sqrt{\det(g_x(v, v))} = \sqrt{g_x(v, v)} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\mathbb{R}^N}} = \|v\|_{\mathbb{R}^N}.$$

Für $n \geq 2$ beschreibt $dM_x(v_1, \dots, v_n)$ das Volumen des von den Vektoren v_1, \dots, v_n aufgespannten Parallelotops

$$\mathcal{P}^{T_x M}(v_1, \dots, v_n) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 1 \right\} \subset T_x M$$

im Euklidischen Vektorraum $(T_x M, \mathcal{O}_{T_x M}, g_x)$. Für $n = 2$ ist $dM_x(v_1, v_2)$ insbesondere der Flächeninhalt des von v_1 und v_2 aufgespannten Parallelogramms in $T_x M$.

Um dies einzusehen, identifizieren wir den Euklidischen Vektorraum $(T_x M, \mathcal{O}_{T_x M}, g_x)$ mit $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$ durch die Wahl einer positiv orientierten ON-Basis in $T_x M$ und benutzen die uns aus Kapitel 9.2 bekannte Beziehung zwischen dem Volumen eines Parallelotops und der Determinante. Sei $a = (a_1, \dots, a_n)$ eine positiv orientierte ON-Basis in $T_x M$ und τ_a der lineare Isomorphismus

$$\begin{aligned} \tau_a : \quad T_x M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v = \sum_i \xi_i a_i &\longmapsto \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x(v, a_1) \\ \vdots \\ g_x(v, a_n) \end{pmatrix}. \\ = \sum_i g_x(v, a_i) a_i & \end{aligned}$$

Der Isomorphismus τ_a ist eine orientierungserhaltende Isometrie. Für die Übergangsmatrix $A = (A_{ki})$ von (v_1, \dots, v_n) zu (a_1, \dots, a_n) gilt

$$v_i = \sum_{k=1}^n A_{ki} a_k = \sum_{k=1}^n g_x(v_i, a_k) a_k$$

und somit

$$A = (A_{ki}) = (g_x(v_i, a_k)) = (\tau_a(v_1) \ \cdots \ \tau_a(v_n)).$$

Aus der Formel (*) in Bemerkung (1) und Bemerkung (2) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} dM_x(v_1, \dots, v_n) &\stackrel{(2)}{=} \sqrt{\det(g_x(v_i, v_j))} \\ &\stackrel{(1*)}{=} \det(\tau_a(v_1) \ \cdots \ \tau_a(v_n)) \\ &\stackrel{K.9.2}{=} \text{Vol}^{\mathbb{R}^n}(\mathcal{P}(\tau_a(v_1), \dots, \tau_a(v_n))) \\ &= \text{Vol}^{T_x M}(\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n)). \end{aligned}$$

(4) $dM := \{dM_x\}_{x \in M}$ ist eine glatte Familie von alternierenden n -Formen, definiert also eine Differentialform $dM \in \Omega^n(M^n)$:

Dazu betrachten wir eine positiv orientierte Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ auf M mit den kanonischen Basisfeldern $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathfrak{X}(U)$ und den dualen 1-Formen $dx_1, \dots, dx_n \in \Omega^1(U)$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} x \in U \quad \longmapsto \quad dM_x\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)\right) &= \sqrt{\det\left(g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right)\right)} \\ &= \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right\rangle_{\mathbb{R}^N}\right)} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

glatt, was die Behauptung zeigt.

Definition. Die n -Form $dM \in \Omega^n(M^n)$ heißt *Volumenform der orientierten Untermannigfaltigkeit* (M, \mathcal{O}_M) des \mathbb{R}^N .

Aus der Definition kann man dann unmittelbar die lokale Darstellung der Volumenform dM bzgl. einer Karte ablesen:

Satz 10.27 (Lokale Darstellung der Volumenform)

Sei (M, \mathcal{O}_M) eine orientierte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N , $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine positiv orientierte Karte auf M und $(g_{ij}) := (\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle)$ die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik bezüglich dieser Karte. Dann gilt

$$dM|_U = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Sind $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder auf M , so gilt

$$dM(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{\det(g(X_i, X_j))}.$$

Ist $\omega \in \Omega^n(M)$ eine beliebige n -Form auf M , so existiert eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$, so dass $\omega = f \cdot dM$. Da der Vektorraum $\Lambda^n(T_x^* M)$ 1-dimensional und dM_x ein Basiselement ist, gilt nämlich $\omega_x = f(x) \cdot dM_x$ für eine Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1: Die Volumenform von \mathbb{R}^n

In den Euklidischen Koordinaten (x_1, \dots, x_n) des \mathbb{R}^n gilt: $d\mathbb{R}^n = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$.

In den Polarkoordinaten auf \mathbb{R}^2 : $\Phi(r, u) := (r \cos(u), r \sin(u))$, $r \in (0, \infty)$, $u \in (0, 2\pi)$, gilt

$$d\mathbb{R}^2 = r \cdot dr \wedge du.$$

Beispiel 2: Die Volumenform einer 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N (dh. eine Kurve). Dann gibt es um jeden Punkt $x \in M$ eine lokale Parametrisierung, die durch eine reguläre Kurve

$$\gamma : I = (a, b) \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^N, \quad \gamma(0) = x$$

gegeben ist. Für die Volumenform in dieser Parametrisierung gilt

$$dM_{\gamma(t)} = \|\gamma'(t)\| dt.$$

In der "klassischen" Literatur heißt $dM|_{\gamma(t)}$ das Bogenelement der Kurve.

Beispiel 3: Die Volumenform von Flächen im \mathbb{R}^3

Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche im \mathbb{R}^3 und $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ eine lokale Parametrisierung von M . Dann wird oft die folgende klassische Schreibweise benutzt

$$E := g_{11} = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right\rangle, \quad F := g_{22} = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right\rangle \quad \text{und} \quad G := g_{12} = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right\rangle.$$

Damit erhält man

$$\theta := \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E & G \\ G & F \end{pmatrix} = EF - G^2 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right\|^2$$

und folglich ist

$$dM_{\Phi(U)}^2 = \sqrt{EF - G^2} du_1 \wedge du_2 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right\| du_1 \wedge du_2.$$

In der "klassischen" Literatur nennt man die Volumenform $dM_{\Phi(U)}^2$ auch das "Oberflächenelement der Fläche".

Für die Lie-Ableitung der Volumenform nach einem Vektorfeld X erhält man die folgende Formel, die für die Integralsätze wichtig werden wird. Mit ihrer Hilfe kann man die Divergenz von einem Vektorfeldes X geometrisch als Volumenverzerrung beim Fluß entlang der Integralkurven von X interpretieren.

Satz 10.28 Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit und sei X ein Vektorfeld auf M . Dann gilt für die Lie-Ableitung der Volumenform nach X

$$L_X dM = \operatorname{div}(X) dM.$$

Beweis: Da keine nichttriviale $(n+1)$ -Form auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit existiert ist das Differential der Volumenform Null: $ddM = 0$. Wegen $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ folgt somit $L_X dM = d(i_X dM)$. Um $d(i_X dM)$ zu berechnen, drücken wir dM und X in lokalen Koordinaten bzgl. einer positiv orientierten Karte aus:

$$dM|_U = \sqrt{\theta} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad \text{und} \quad X|_U = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Dabei bezeichnet $\theta := \det(g_{ij})$. Dann gilt (über dem Kartenbereich U)

$$i_X dM = \sum_{i=1}^n \sqrt{\theta} \xi^i i_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sqrt{\theta} \xi^i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Somit folgt (über U)

$$\begin{aligned} d(i_X dM) &= \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i-j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sqrt{\theta} \xi^i) \underbrace{dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n}_{=0, \text{ wenn } i \neq j} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\theta} \xi^i) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\theta} \xi^i) dM = \operatorname{div}(X) dM. \end{aligned}$$

□

Abschließend untersuchen wir zur Vorbereitung auf die Integralsätze noch den Zusammenhang zwischen der Volumenform einer orientierten Mannigfaltigkeit mit Rand und der Volumenform des Randes. Zu diesem Zwecke müssen wir festlegen, welche Orientierung wir auf dem Rand wählen wollen.

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$. ∂M ist eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und für einen Randpunkt $x \in \partial M$ ist der Tangentialraum $T_x \partial M$ von ∂M im Punkt x ein $(n-1)$ -dimensionaler Unterraum des n -dimensionalen Tangentialraumes $T_x M$.

Definition. Die Abbildung $x \in \partial M \rightarrow \nu(x) \in T_x M \subset \mathbb{R}^N$ mit

1. $\nu(x) \perp_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^N}} T_x(\partial M)$,
2. $\|\nu(x)\| = 1$,
3. es existiert eine Kurve $\gamma : (-\varepsilon, 0] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = \nu(x)$

heißt Vektorfeld der äußeren Normalen auf dem Rand ∂M .

Definition. Sei (M, \mathcal{O}_M) eine orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$ und $\nu : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^N$ das Vektorfeld der äußeren Normalen des Randes. Wir definieren eine Orientierung $\mathcal{O}_{\partial M}$ auf dem Rand durch

$$(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathcal{O}_{T_x(\partial M)} \iff (\nu(x), \nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathcal{O}_{T_x M}.$$

$\mathcal{O}_{\partial M}$ heißt die durch \mathcal{O}_M induzierte Orientierung.

Satz 10.29 Sei (M, \mathcal{O}_M) eine orientierte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^N mit Rand $\partial M \neq \emptyset$. Bezeichne $\nu : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^N$ das Vektorfeld der äußeren Normalen und $\mathcal{O}_{\partial M}$ die induzierte Orientierung auf ∂M . Dann gilt für die Volumenformen

$$d(\partial M) = i_\nu dM|_{\partial M} \in \Omega^{n-1}(\partial M).$$

Beweis: Sei $x \in \partial M$ und $(e_1(x), \dots, e_{n-1}(x))$ eine positiv orientierte orthonormale Basis in $T_x(\partial M)$. Dann ist $(\nu(x), e_1(x), \dots, e_{n-1}(x))$ eine positiv orientierte orthonormale Basis in $T_x M$ und es folgt aus der Definition der Volumenform

$$d(\partial M)_x(e_1, \dots, e_{n-1}) = 1 = (dM)_x(\nu(x), e_1, \dots, e_{n-1}) = i_{\nu(x)} dM_x(e_1, \dots, e_{n-1}),$$

also ist $d(\partial M)_x = i_{\nu(x)} dM_x$. □

10.10 Integration von Differentialformen

In diesem Abschnitt wollen wir eine Integrationstheorie für orientierte Mannigfaltigkeiten M behandeln, die Differentialformen zur Konstruktion der Maße benutzt. Dies soll die klassischen Maße (Bogenlänge von Kurven, Oberflächenmaß von gekrümmten Flächen, Lebesgue-Maß im \mathbb{R}^n) als Spezialfall umfassen.

Sei also M eine n -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit und ω eine n -Form auf M mit noch zu präzisierenden "guten" Eigenschaften. Wir werden einen Maßraum $(M, \mathcal{L}(M), \mu_\omega)$ auf der Grundmenge M definieren, wobei $\mathcal{L}(M)$ eine σ -Algebra von meßbaren Teilmengen von M und $\mu_\omega : \mathcal{L}(M) \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß auf dieser σ -Algebra ist, das von ω abhängt. Benutzen wir dann für ω die Volumenform dM , so ergibt sich die klassische Bogenlänge von Kurven, der klassische Oberflächeninhalt für gekrümmte Flächen $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ bzw. das Lebesgue-Maß für $M = \mathbb{R}^n$.

10.10.1 Meßbare Teilmengen von Untermannigfaltigkeiten

Um ein Maß für eine möglichst große Menge von Teilmengen des \mathbb{R}^n zu erhalten, das die Vorstellung vom geometrischen Volumen dieser Teilmengen modelliert, hatten wir in Kapitel 9 das Lebesgue-Maß definiert. Wir wissen also, was eine Lebesgue-meßbare Teilmenge des \mathbb{R}^n ist. Wir übertragen diesen Begriff jetzt durch die Kartenabbildungen auf Mannigfaltigkeiten.

Definition. Sei M^n eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt meßbar (bzw. Nullmenge), wenn für jede Karte (U, φ) von M die Menge $\varphi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar (bzw. eine Lebesguesche Nullmenge) ist.

Mit $\mathcal{L}(M)$ bezeichnen wir die Menge aller meßbaren Teilmengen von M .

Bemerkung: Zum Nachweis der Meßbarkeit einer Teilmenge $A \subset M$ muß man die Lebesgue-Meßbarkeit der Mengen $\varphi(A \cap U)$ nicht für alle Karten (U, φ) von M überprüfen, sondern kann sich auf die Karten eines beliebig fixierten Atlanten von M beschränken. Das gleiche gilt für die Nullmengen. Dies folgt, da Lebesgue-meßbare Mengen und Lebesguesche Nullmengen im \mathbb{R}^n unter C^1 -Abbildungen in ebensolche übergehen und da die Kartenübergänge zwischen zwei Karten der Mannigfaltigkeit M mindestens von der Klasse C^1 sind. Aus der Definition folgt unmittelbar

Satz 10.30 $\mathcal{L}(M)$ ist eine σ -Algebra auf M .

10.10.2 Definition des Integrals

Sei ω eine n -Form auf einer n -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M und $A \subset M$ eine meßbare Menge. Wir wollen das Integral

$$\int_A \omega$$

von ω über A definieren.

Im folgenden bezeichne

$$\omega|_U = \omega_\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad \text{mit} \quad \omega_\varphi(x) := \omega_x \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right)$$

die lokale Darstellung von ω bzgl. einer Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$. Die Kartendarstellung der Koordinatenfunktion, d.h. die Funktion $\omega_\varphi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine glatte Funktion auf dem Koordinatenbereich $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Diese Funktion ist folglich Lebesgue-meßbar. Ist z.B. ω_φ nicht-negativ oder der Träger von ω_φ kompakt, so existiert das Lebesgue-Integral

$$\int_{\varphi(U \cap A)} \omega_\varphi \circ \varphi^{-1} d\lambda_n \quad (*)$$

in $[0, \infty]$ bzw. in \mathbb{R} (siehe Kapitel 9).

Möchte man nun ein Integral von ω über der Menge A definieren, so könnte man so vorgehen: Man zerlegt A in "kleine" Teilmengen, die jeweils in einem Kartenbereich enthalten sind, betrachtet für diese kleinen Teilmengen die Lebesgue-Integrale $(*)$ und addiert diese. Im folgenden werden wir zeigen, dass diese Idee (unter gewissen einschränkenden Bedingungen) funktioniert.

Im folgenden sei M immer eine n -dimensionale, *orientierte* Untermannigfaltigkeit mit oder ohne Rand. Wir betrachten die folgenden Klassen von n -Formen:

1. Die n -Formen mit kompaktem Träger:

$$\Omega_0^n(M) := \{\omega \in \Omega^n(M) \mid \text{supp } \omega := \text{cl}\{x \in M \mid \omega_x \neq 0\} \text{ ist kompakt}\},$$

2. Die positiven bzw. negativen n -Formen:

$$\Omega_+^n(M) := \{\omega \in \Omega^n(M) \mid \omega_x(a_1, \dots, a_n) \geq 0 \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{O}_{T_x M}, x \in M\}$$

und

$$\Omega_-^n(M) := \{\omega \in \Omega^n(M) \mid \omega_x(a_1, \dots, a_n) \leq 0 \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{O}_{T_x M}, x \in M\}.$$

Für die Volumenform von M gilt immer $dM \in \Omega_+^n(M)$. Ist M kompakt, so ist $\Omega_0^n(M) = \Omega^n(M)$.

Wir definieren das Integral in zwei Schritten und rechtfertigen die Korrektheit der Definition in den Sätzen 10.31 und 10.33. Zunächst betrachten wir den Fall, daß die Menge A in einem Kartenbereich liegt.

Definition.[I₁]

Sei $\omega \in \Omega_{0,\pm}^n(M^n)$ eine n -Form auf M , die kompakten Träger hat oder positiv bzw. negativ ist. A bezeichne eine meßbare Teilmenge von M , die in einer Kartenumgebung U von M enthalten ist. Es sei weiterhin $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine positiv orientierte Karte und $\omega|_U = \omega_\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ die lokale Darstellung von ω bezüglich (U, φ) . Wir definieren das Integral von ω über A durch:

$$\int_A \omega := \int_{\varphi(A)} \omega_\varphi \circ \varphi^{-1} d\lambda_n, \quad (I_1)$$

wobei $d\lambda_n$ das Lebesgue-Maß des \mathbb{R}^n ist.

Für $\omega \in \Omega_+(M^n)$ bzw. $\omega \in \Omega_-^n(M^n)$ ist ω_φ nicht-negativ bzw. nicht-positiv, das Integral (I_1) existiert also in $[0, \infty]$ bzw. in $[-\infty, 0]$. Hat ω kompakten Träger und liegt dieser in U , so existiert (I_1) ebenfalls und ist endlich. In Satz 10.33 werden wir zeigen, dass (I_1) auch für jede Form $\omega \in \Omega_0(M^n)$ mit kompakten Träger existiert. Wir zeigen als erstes, dass der Wert von (I_1) nicht von der gewählten Karte abhängt.

Satz 10.31 Seien (U, φ) und (V, ψ) zwei positiv orientierte Karten von M mit $A \subset U$ und $A \subset V$. Wenn das Integral (I_1) für eine der Karten existiert, so existiert es auch für die andere und es gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega_\varphi \circ \varphi^{-1} d\lambda_n = \int_{\psi(A)} \omega_\psi \circ \psi^{-1} d\lambda_n.$$

Beweis: Sei also $A \subset U \cap V$ und seien $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ und $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ zwei positiv orientierte Kartenabbildungen auf $U \cap V$. Bezüglich dieser Karten hat ω die lokale Darstellung

$$\omega = \omega_\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \omega_\psi dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Nach Definition ist

$$\omega_\varphi := \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \det(D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}) \omega \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right).$$

Wir bemerken, daß $\det(D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}) > 0$, denn die Jacobimatrix $D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ der Koordinatentransformation $T := \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(U)$ ist gerade die Übergangsfunktion zwischen den kanonischen Basen der Karten $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ und $\psi = (y_1, \dots, y_n)$, die beide positiv orientiert sind. Also ist

$$\omega_\varphi = |\det(DT)_\varphi| \cdot \omega_\psi$$

und somit

$$\omega_\varphi \circ \varphi^{-1} = |\det(DT)| \cdot (\omega_\psi \circ \psi^{-1} \circ T). \quad (*)$$

Aus der Transformationsformel für Lebesgue-Integrale im \mathbb{R}^n (siehe Kapitel 9.6) ergibt sich die Existenz beider Integrale sofern eines existiert sowie die Formel

$$\int_{\psi(A)=T(\varphi(A))} \omega_\psi \circ \psi^{-1} d\lambda^n = \int_{\varphi(A)} (\omega_\psi \circ \psi^{-1} \circ T) \cdot |\det DT| d\lambda^n \stackrel{(*)}{=} \int_{\varphi(A)} \omega_\varphi \circ \varphi^{-1} d\lambda^n.$$

□

Im allgemeinen liegt die meßbare Menge A allerdings nicht in einem Kartenbereich. Um das Integral auch über einer solchen Menge korrekt definieren zu können, benutzt man die sogenannte *Zerlegung der 1*.

Definition. Sei M^n eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und \mathcal{A} ein Atlas von M . Eine Zerlegung der 1 zum Atlas \mathcal{A} ist eine höchstens abzählbare Familie $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ von nicht-negativen glatten Funktionen $f_\alpha : M \rightarrow [0, 1]$ so daß

1. Die Träger von f_α , dh. die Mengen $\text{supp} f_\alpha := \text{cl}\{x \in M \mid f_\alpha(x) \neq 0\}$ sind kompakt und in einer Kartenumgebung von \mathcal{A} enthalten.
2. $\{\text{supp} f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ist eine lokal endliche Familie von Mengen, d.h. zu jedem $x \in M$ existiert eine Umgebung $U(x)$, so daß $U(x) \cap \text{supp} f_\alpha \neq \emptyset$ nur für endlich viele α .
3. $\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) \equiv 1$ für alle $x \in M$.

Mit anderen Worten, die Funktionen f_α zerlegen die Funktion $f \equiv 1$ in eine Summe von Funktionen mit kompakten Trägern, die jeweils in einer Kartenumgebung liegen.

Aus der zweiten Eigenschaft der Zerlegung der 1 folgt insbesondere, dass für jede kompakte Menge $K \subset M$ die Menge der Indizes $\Lambda_K := \{\alpha \in \Lambda \mid K \cap \text{supp} f_\alpha \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Wir zitieren hier ohne Beweis den folgenden Satz (siehe Vorlesung über Differentialgeometrie oder K. Jänich: Vektoranalysis, S. 158.)

Satz 10.32 Zu jedem Atlas \mathcal{A} von M existiert eine Zerlegung $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ der 1. Insbesondere kann man aus \mathcal{A} immer einen höchstens abzählbaren Atlas $\widehat{\mathcal{A}} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{A}$ auswählen mit $\text{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$.

Nun können wir das Integral für beliebige meßbare Mengen definieren:

Definition. [I₂]

Sei $A \subset M$ eine beliebige meßbare Teilmenge, $\omega \in \Omega_{0,\pm}^n(M^n)$ und $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ ein positiv orientierter Atlas mit einer Zerlegung der 1, $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Dann definieren wir

$$\int_A \omega := \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \omega. \quad (I_2)$$

Das Integral (I_2) existiert immer:

- Da die Menge $\text{supp}(f_\alpha \omega) \subset \text{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$ kompakt ist, ist $f_\alpha \omega$ eine n -Form mit kompaktem Träger in U_α . Das Integral $\int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \omega$ existiert somit immer nach (I_1) und ist endlich.
- Ist $\omega \in \Omega_{\pm}^n(M)$, so haben alle Integrale $\int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \omega$ das gleiche Vorzeichen, d.h. (I_2) existiert in $[0, \infty]$ bzw. $[-\infty, 0]$.
- Ist $\omega \in \Omega_0^n(M)$, so ist die Menge der Indizes $\Lambda' := \{\alpha \in \Lambda \mid \text{supp} f_\alpha \cap \omega \neq \emptyset\}$ endlich. In (I_2) steht dann nur eine *endliche* Summe reeller Zahlen.

Satz 10.33 1. Das Integral (I_2) ist unabhängig von der Wahl von \mathcal{A} und $\{f_\alpha\}$.

2. Liegt A in einem Kartenbereich U von M , so existiert das Integral (I_1) und stimmt mit dem Integral (I_2) überein.

Beweis: Sei $\widehat{\mathcal{A}} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ ein weiterer positiv orientierter Atlas von M mit zugehöriger Zerlegung der 1, $\{g_\beta\}$. Wir müssen zeigen, daß

$$\sum_{\alpha} \int_{U_\alpha \cap A} f_\alpha \omega = \sum_{\beta} \int_{V_\beta \cap A} g_\beta \omega.$$

Es ist $f_\alpha = \sum_{\beta} f_\alpha \cdot g_\beta$ und $g_\beta = \sum_{\alpha} g_\beta \cdot f_\alpha$. Wegen $\text{supp}(f_\alpha g_\beta \omega) \subset U_\alpha \cap V_\beta$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \int_{U_\alpha \cap A} f_\alpha \omega &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \int_{U_\alpha \cap A} (f_\alpha \cdot g_\beta) \omega = \sum_{\beta} \sum_{\alpha} \int_{V_\beta \cap A} (f_\alpha \cdot g_\beta) \omega \\ &= \sum_{\beta} \int_{V_\beta \cap A} \sum_{\alpha} (f_\alpha \cdot g_\beta) \omega = \sum_{\beta} \int_{V_\beta \cap A} g_\beta \omega, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt Summe und Integral vertauschen durften, da die Summe endlich ist, falls $\omega \in \Omega_0(M)$, oder eine monotone Folge, falls $\omega \in \Omega_{\pm}(M)$.

Sei nun (U, φ) eine positiv orientierte Karte und $A \subset U$. Wir wollen zeigen, daß

$$\int_{\varphi(A)} \omega_\varphi \circ \varphi^{-1} d\lambda_n = \sum_{\alpha} \int_{U_\alpha \cap A} f_\alpha \omega$$

gilt. Für jedes α ist die Menge $A \cap U_\alpha$ meßbar und in U enthalten. Nach Satz 10.31 ist der Wert $\int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \omega$ wohldefiniert und wir können zu seiner Berechnung eine beliebige positiv orientierte Karte auf U , z.B. φ , wählen. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \int_{U_\alpha \cap A} f_\alpha \omega &= \sum_{\alpha} \int_{\varphi(U_\alpha \cap A)} (f_\alpha \circ \varphi^{-1})(\omega_\varphi \circ \varphi^{-1}) d\lambda_n = \sum_{\alpha} \int_{\varphi(U \cap A)} (f_\alpha \circ \varphi^{-1})(\omega_\varphi \circ \varphi^{-1}) d\lambda_n \\ &= \int_{\varphi(U \cap A)} \left(\sum_{\alpha} f_\alpha \omega_\varphi \right) \circ \varphi^{-1} d\lambda_n = \int_{\varphi(A)} \omega_\varphi \circ \varphi^{-1} d\lambda_n. \end{aligned}$$

□

10.10.3 Eigenschaften und Berechnung des Integrals

Satz 10.34 (Elementare Eigenschaften des Integrals)

1. Es sei $\omega \in \Omega_{0,\pm}^n(M)$ und $A \subset M$ meßbar. Ist $A = A_0 \cup \bigcup_{i=1}^N A_i$ eine Zerlegung von A in höchstens abzählbare viele, paarweise disjunkte, meßbare Mengen, wobei A_0 eine Nullmenge ist, so gilt

$$\int_A \omega = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \omega.$$

2. Das Integral ist linear. Seien ω_1 und ω_2 n -Formen aus $\Omega_0^n(M)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_A \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 = \lambda_1 \int_A \omega_1 + \lambda_2 \int_A \omega_2.$$

3. Ist $\omega \in \Omega_0^n(M)$ eine positive Form und $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $f \leq g$. Dann gilt

$$\int_A f \omega \leq \int_A g \omega.$$

4. Sei $F : M \rightarrow N$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, $A \subset M$ eine meßbare Menge und $\omega \in \Omega_{0,\pm}^n(N)$. Dann gilt

$$\int_A F^* \omega = \int_{F(A)} \omega.$$

5. $-M$ bezeichne die Untermannigfaltigkeit M , versehen mit der entgegengesetzten Orientierung. Dann gilt

$$\int_{-A} \omega = - \int_A \omega.$$

Beweis: Zu 1. Dies folgt direkt aus den Eigenschaften des Lebesgue-Integrals:

$$\begin{aligned} \int_A \omega &\stackrel{I_2}{=} \sum_{\alpha} \int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \omega \stackrel{I_1}{=} \sum_{\alpha} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap A)} (f_\alpha \omega_{\varphi_\alpha}) \circ \varphi_\alpha^{-1} d\lambda_n = \sum_{\alpha} \sum_{i=0}^N \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap A_i)} (f_\alpha \omega_{\varphi_\alpha}) \circ \varphi_\alpha^{-1} d\lambda_n \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^N \int_{U_\alpha \cap A_i} f_\alpha \omega = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha} \int_{A_i} f_\alpha \omega = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \sum_{\alpha} f_\alpha \omega = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \omega, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha) = \underbrace{\varphi_\alpha(A_0 \cap U_\alpha)}_{\text{Nullmenge}} \cup \bigcup_{i=1}^N \underbrace{\varphi_\alpha(A_i \cap U_\alpha)}_{\text{paarweise disjunkt}}$$

und die Endlichkeit bzw. Monotonie von \sum_α benutzt haben.

Zu 2. Folgt direkt aus der Definition.

Zu 3. Dies folgt aus der entsprechenden Eigenschaft der Lebesgue-Integrale.

Zu 4. Dies ist die koordinatenunabhängige Variante der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral. Nach 1. genügt es, die Behauptung für meßbare Mengen $A \subset M$ mit $A \subset U$ und $F(A) \subset V$ zu zeigen, wobei (U, φ) und (V, ψ) positiv orientierte Karten auf M bzw. N sind. Es gilt

$$\int_{F(A)} \omega = \int_{\psi(F(A))} \omega_\psi \circ \psi^{-1} d\lambda_n.$$

Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$T := \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n.$$

Dann folgt aus der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral (Kapitel 9.6)

$$\int_{F(A)} \omega = \int_{T(\varphi(A))} \omega_\psi \circ \psi^{-1} d\lambda_n = \int_{\varphi(A)} (\omega_\psi \circ \psi^{-1} \circ T) \cdot |\det DT| d\lambda_n.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (F^*\omega)_\varphi(x) &= (F^*\omega)_x \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right) = \omega_{F(x)} \left(dF_x \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x) \right), \dots, dF_x \left(\frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right) \right) \\ &= \underbrace{\det(D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}))_{\varphi(x)}}_{=\det DT_{\varphi(x)}} \cdot \underbrace{\omega_{F(x)} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}(F(x)), \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}(F(x)) \right)}_{\omega_\psi(F(x))} \\ &= \det DT_{\varphi(x)} \cdot \omega_\psi(F(x)), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition der kanonischen Basis und das Transformationsverhalten von Formen unter Koordinatenwechsel benutzt haben. Daraus folgt

$$(F^*\omega)_\varphi \circ \varphi^{-1} = (\det DT) \cdot (\omega_\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = (\det DT) \cdot (\omega_\psi \circ \psi^{-1} \circ T).$$

Wir bemerken, daß $\det(D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})) > 0$, denn F ist orientierungserhaltend. Somit erhalten wir

$$(F^*\omega)_\varphi \circ \varphi^{-1} = |\det DT| \cdot (\omega_\psi \circ \psi^{-1} \circ T)$$

und deshalb ist

$$\int_{F(A)} \omega = \int_{\varphi(A)} (F^*\omega)_\varphi \circ \varphi^{-1} d\lambda_n = \int_A F^*\omega.$$

Zu 5. Wie oben dürfen wir oBdA annehmen, daß $A \subset U$, wobei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine positiv orientierte Karte auf M sei. Dann ist $(U, \hat{\varphi} = (-x_1, x_2, \dots, x_n))$ eine positiv orientierte Karte auf $-M$. Wir haben $\omega_\varphi = \omega(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) = -\omega_{\hat{\varphi}}$. Definieren wir $T := \varphi \circ \hat{\varphi}^{-1}$, dann ist $\det(DT) = -1$. Also gilt

$$\begin{aligned} \int_A \omega &= \int_{\varphi(A)} (\omega_\varphi \circ \varphi^{-1}) d\lambda_n = \int_{T(\hat{\varphi}(A))} (\omega_\varphi \circ \varphi^{-1}) d\lambda_n \\ &= \int_{\hat{\varphi}(A)} (\omega_\varphi \circ \varphi^{-1} \circ T) \cdot \underbrace{|\det D(T)|}_{=1} d\lambda_n = - \int_{\hat{\varphi}(A)} \omega_{\hat{\varphi}} \circ \hat{\varphi}^{-1} d\lambda_n. \end{aligned}$$

Dann folgt aus der Definition

$$\int_{-A} \omega = \int_{\hat{\varphi}(A)} \omega_{\hat{\varphi}} \circ \hat{\varphi}^{-1} d\lambda^n = - \int_A \omega. \quad \square$$

Bemerkung: Aus der Eigenschaft (1) des Integrals ergeben sich folgende Regeln zur Berechnung von Integralen $\int_A \omega$:

1. Nullmengen kann man aus dem Definitionsbereich weglassen.
2. Man zerlegt A in eine disjunkte Vereinigung höchstens abzählbar vieler meßbarer Mengen, die jeweils in einem Kartenbereich enthalten sind: $A = \bigcup_{i=1}^N A_i$, $N \leq \infty$. Dann gilt

$$\int_a \omega = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \omega$$

und man kann die einzelnen Integrale über A_i nach Definition (I₁) berechnen.

Satz 10.35 Sei $\mathcal{L}(M)$ die σ -Algebra der meßbaren Teilmengen von M^n und $\omega \in \Omega_+^n(M)$ eine positive n -Form auf M . Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_\omega : \mathcal{L}(M) &\longrightarrow [0, \infty] \\ A &\longmapsto \int_A \omega \end{aligned}$$

ein Maß auf $\mathcal{L}(M)$ und das (entsprechend Kapitel 9.4 definierte) Integral für den Maßraum $(M, \mathcal{L}(M), \mu_\omega)$ erfüllt

$$\int_A f d\mu_\omega = \int_A f \omega.$$

Satz 10.36 (Mittelwertsatz) Sei M eine orientierte, n -dimensionale Untermannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega_+^n(M)$ eine positive n -Form auf M und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf M .

1. Sei $A \subset M$ eine kompakte, zusammenhängende Teilmenge. Dann existiert ein Punkt $x_0 \in A$, so daß

$$f(x_0) \cdot \int_A \omega = \int_A f \omega.$$

2. Sei $x \in M$ und $(A_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten, zusammenhängenden Teilmengen von M mit $x \in A_n(x)$, $\text{diam}(A_n(x)) \rightarrow 0$ und $\int_{A_n(x)} \omega \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{A_n(x)} f \omega}{\int_{A_n(x)} \omega}.$$

Beweis: 1. beweist man durch wörtliche Übertragung des Beweises des Mittelwertsatzes für bestimmte Integrale im \mathbb{R}^1 (siehe Kapitel 7.4, Satz 7.17). Man benutzt dabei lediglich die Monotonie des Integrals, den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen auf zusammenhängenden Mengen, sowie die Existenz von Maximum und Minimum einer stetigen Funktion auf kompakten Mengen.

2. Sei $x_n \in A_n(x)$ eine Folge von Punkten mit

$$f(x_n) \cdot \int_{A_n(x)} \omega = \int_{A_n(x)} f\omega. \quad (*)$$

Da $\text{diam}(A_n(x)) \rightarrow 0$ und $x \in \bigcap_n A_n(x)$, konvergiert die Folge (x_n) gegen x . Da f stetig, also folgenstetig ist, gilt $f(x_n) \rightarrow f(x)$ und die Behauptung folgt aus (*) durch Grenzübergang. \square

Wir vereinbaren noch die folgende Schreibweise:

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N und $\omega^n \in \Omega^n(W)$ eine n -Form auf einer offenen Teilmenge W des Einbettungsraumes \mathbb{R}^N . Die Form ω definiert uns eine n -Form auf der Untermannigfaltigkeit M^n , indem wir in die n -Formen ω_x nur Vektoren einsetzen, die in x tangential an M^n sind:

$$\begin{aligned} T_x M \times \dots \times T_x M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n) &\longmapsto \omega_x(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Diese n -Form auf M stimmt mit der n -Form überein, die aus $\omega \in \Omega^n(W)$ durch Zurückziehen mit der Einbettungsabbildung $\iota : M \hookrightarrow W \subset \mathbb{R}^N$ entsteht. Wenn wir im folgenden das Integral von ω über einer meßbaren Teilmenge $A \subset M$ schreiben, so verstehen wir darunter immer das Integral dieser auf M zurückgezogenen Form (!):

$$\int_A \omega := \int_A \iota^* \omega.$$

Diese nicht ganz exakte Schreibweise hat sich in der Integrationstheorie eingebürgert, um die Bezeichnungen einfach zu halten.

Wir bekommen damit auch eine Übereinstimmung mit dem in Abschnitt 10.9.4 betrachteten Kurvenintegral. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit (d.h. eine Kurve im \mathbb{R}^N) und $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^N)$ eine 1-Form auf dem \mathbb{R}^N oder auf einer offenen Umgebung der Kurve Γ . Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ eine reguläre Parametrisierung von Γ (evt. bis auf endlich viele Punkte). Das *Kurvenintegral von ω über γ* war definiert als

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

Andererseits ist die lokale Darstellung von $\iota^* \omega \in \Omega^1(\Gamma)$ in der durch die Parametrisierung γ gegebenen Karte ebenfalls

$$\iota^* \omega = \omega\left(\frac{d}{dt}\right) dt = \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

Folglich gilt mit der oben vereinbarten Schreibweise

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_\gamma \omega.$$

10.10.4 Das Lebesgue-Maß auf Untermannigfaltigkeiten, das Volumen von Teilmengen und das Oberflächenintegral

Wir betrachten jetzt als Spezialfall das Maß, das durch die Volumenform $dM \in \Omega_+^n(M^n)$ einer orientierten Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^N$ definiert wird.

Das Maß

$$\begin{aligned} \lambda_M : \mathcal{L}(M) &\longrightarrow [0, \infty] \\ A &\longmapsto \int_A dM \end{aligned}$$

heißt das *Lebesgue-Maß auf M* . Ist $A \subset M$ meßbar, so heißt die Zahl

$$\text{Vol}(A) := \lambda_M(A) = \int_A dM$$

das *Volumen von $A \subset M$* (oder auch *Flächeninhalt von A* , wenn $n = 2$).

Eine Funktion $f : A \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lebesgue-integrierbar über $A \in \mathcal{L}(M)$, wenn das Integral

$$\int_A f d\lambda_M = \int_A f dM \quad (*)$$

existiert und endlich ist. In diesem Fall nennt man das Integral (*) das *Oberflächenintegral von f über A* .

Bemerkung: Das Lebesgue-Maß kann man auch für nicht orientierbare Untermannigfaltigkeiten definieren. Dazu erinnern wir uns daran, dass bei Orientierungsänderung, also für $-M := (M, -\mathcal{O}_M)$, folgende Formeln gelten:

$$d(-M) = -dM \quad \text{und} \quad \int_A dM = - \int_{-A} dM = \int_{-A} d(-M).$$

Es ist also egal, ob man die Orientierung \mathcal{O}_M oder $-\mathcal{O}_M$ für die Integraldefinition benutzt. Da man das Lebesgue-Integral auf die Integration über Teilmengen in Kartenbereichen zurückführen kann und jede Karte orientierbar ist, benötigt man in diesem Spezialfall die Orientierung der gesamten Mannigfaltigkeit nicht.

Ist A in einem Kartengebiet U enthalten, $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ eine *beliebige* Kartenabbildung auf U und (g_{ij}) die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik bzgl. dieser Karte, so gilt nach Definition der Volumenform für das Volumen von A

$$\text{Vol}(A) = \int_A \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij})} \circ \varphi^{-1} d\lambda_n,$$

und das Oberflächenintegral berechnet sich durch

$$\int_A f dM = \int_{\varphi(A)} f(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij})}(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)) \cdot d\lambda_n(x_1, \dots, x_n).$$

Eine geometrische Interpretation des Volumens:

1. Für $M = \mathbb{R}^n$ stimmen die beiden Lebesgue-Maße und Volumenbegriffe überein:

Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und sind $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ die Euklidischen Koordinaten von \mathbb{R}^n , so gilt

$$\text{Vol}(A) = \int_A d\mathbb{R}^n = \int_A dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_A d\lambda_n = \lambda_n(A).$$

2. Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte von M und bezeichne

$$x \in U \longrightarrow V(x) := \text{Volumen des von } \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \text{ aufgespannten} \\ \text{Parallelotops in } T_x M$$

die von dieser Karte definierte Volumenfunktion. Für $A \subset U$ ist das Volumen $\text{Vol}(A)$ die Mittlung der Volumenfunktion V über A :

$$\text{Vol}(A) = \int_A V dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\varphi(A)} V(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)) d\lambda_n(x_1, \dots, x_n).$$

3. Für Hyperflächen kann man die folgende geometrische Interpretation des Volumens beweisen: Sei M^n eine orientierte Hyperfläche im \mathbb{R}^{n+1} mit der Normalenabbildung $\mathbf{n} : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Sei W eine Teilmenge von M und x_0 ein fixierter Punkt aus W . Wir bezeichnen mit \widetilde{W} die Projektion von W auf die Tangentialebene $Tan_{x_0} M$ entlang $\mathbf{n}(x_0)$. Sei nun $\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_k)$ eine Unterteilung von A in disjunkte meßbare Mengen und bezeichne

$$\text{Vol}(A, \mathcal{W}) := \sum_{i=1}^k \text{Vol}(\widetilde{W}_i) := \sum_{i=1}^k \lambda_n(\widetilde{W}_i).$$

Die Norm der Unterteilung sei

$$\|\mathcal{W}\| := \max\{\text{diam}(W_i) \mid i = 1, \dots, k\}.$$

Sei (\mathcal{W}_n) eine Folge von Unterteilungen von A mit $\|\mathcal{W}_n\| \rightarrow 0$. Dann gilt

$$\text{Vol}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Vol}(A, \mathcal{W}_n).$$

(Man findet einen Beweis dazu im Buch von M. do Carmo: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen.

Beispiel 1: Volumen von Kurven (= Länge)

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$ eine Kurve, die M bis auf endlich viele Punkte parametrisiert. Für die Volumenform gilt dann $dM_{\gamma(t)} = \|\gamma'(t)\| dt$. Das Volumen von M ist also gerade die Länge der Kurve γ

$$\text{Vol}(M) = \int_M dM = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \text{Länge}(\gamma).$$

Beispiel 2: Volumen von Flächen im \mathbb{R}^3 (= Oberflächeninhalt)

Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche im \mathbb{R}^3 und $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ eine lokale Parametrisierung von M . Bezeichne wie in Abschnitt 10.9.5

$$E := g_{11} = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right\rangle, \quad F := g_{22} = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right\rangle \quad \text{und} \quad G := g_{12} = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right\rangle.$$

Die Volumenform ist gegeben durch

$$dM_{\Phi(U)}^2 = \sqrt{EF - G^2} du_1 \wedge du_2 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right\| du_1 \wedge du_2.$$

Ist also A eine meßbare Teilmenge in $\Phi(U)$ und $A = \Phi(W)$, so gilt für den Flächeninhalt von A

$$\text{Vol}(A) = \int_W \sqrt{EF - G^2} \, du_1 du_2 = \int_W \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right\| \, du_1 du_2$$

Als Spezialfälle erhält man durch Berechnung von (g_{ij}) :

Flächeninhalt eines Graphen:

Sei $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und

$M^2 = \text{graph}(h) = \{(u_1, u_2, h(u_1, u_2)) \mid (u_1, u_2) \in U\}$ der Graph von h . Dann gilt

$$\text{Vol}(M^2) = \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u_2}\right)^2} \, du_1 du_2.$$

Flächeninhalt einer Rotationsfläche:

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte reguläre Kurve mit $\gamma_1 > 0$ und bezeichne

$$M_\gamma^2 := \{(\gamma_1(v) \cos u, \gamma_1(v) \sin u, \gamma_2(v)) \mid u \in \mathbb{R}, v \in [a, b]\}$$

die von γ erzeugte Rotationsfläche. Dann gilt

$$\text{Vol}(M_\gamma^2) = \int_{(0, 2\pi) \times (a, b)} \gamma_1(v) \|\gamma'(v)\| \, dudv = 2\pi \int_a^b \gamma_1(v) \|\gamma'(v)\| \, dv.$$

10.11 Der Satz von Stokes

Für das Riemann-Integral kennt man die Formel

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a).$$

Unter gewissen Bedingungen an den Integranden kann man also das Integral durch Werte auf dem Rand des Integrationsbereiches ausdrücken. Dies wollen wir nun auf Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern. Wir werden zeigen, daß man das Integral

$$\int_{M^n} \eta$$

durch ein Integral über den Rand ∂M^n ausdrücken kann, falls die n -Form η exakt, d.h. von der Form $\eta = d\omega$ ist.

10.11.1 Der Satz von Stokes für Differentialformen

Satz 10.37 (Satz von Stokes für Differentialformen)

Sei M^n eine n -dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit, ∂M der Rand von M , versehen mit der induzierten Orientierung, und ω eine $(n-1)$ -Form mit kompaktem Träger auf M . Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad (*)$$

wobei ω auf der rechten Seite als $(n-1)$ -Form über der Mannigfaltigkeit ∂M aufgefasst wird, indem man für $x \in \partial M$ nur Tangentialvektoren von $T_x(\partial M)$ in ω_x einsetzt.

Beweis: Sei $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein Atlas auf M und $\{f_\alpha\}$ eine Zerlegung der 1 zu \mathcal{A} . Dann ist $\omega = \sum_\alpha f_\alpha \omega$, wobei die Summe endlich ist, da $\text{supp } \omega$ kompakt und die Familie der Träger $\{\text{supp } f_\alpha\}$ lokal endlich ist. Da die linke und die rechte Seite von (*) linear in ω ist, genügt es zu zeigen, daß $\int_M d(f_\alpha \omega) = \int_M f_\alpha \omega$ gilt. Deshalb können wir zum Beweis von (*) oBdA annehmen, daß der Träger von ω in einem Kartengebiet U von M liegt.

Wir werden (*) nun durch direktes Ausrechnen beider Integrale beweisen.

(1) Berechnung von $\int_M d\omega$:

Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine positiv orientierte Karte mit $\varphi(U) \subset \mathbb{R}_+^n$. Bezüglich dieser Karte ist ω durch

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n, \quad \text{mit } \omega_i = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

gegeben. Wenden wir das Differential darauf an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n d\omega_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_i) dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x_i} (\omega_i) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = (d\omega)_\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen und Umformen des Integrals erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_U d\omega = \int_{\varphi(U)} (d\omega)_\varphi \circ \varphi^{-1} d\lambda_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\varphi(U)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\omega_i) \circ \varphi^{-1} d\lambda_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\varphi(U)} \frac{\partial(\omega_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} d\lambda_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial(\omega_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} (x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_{[0, \infty)} \dots \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial(\omega_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} (x_1, \dots, x_n) dx_i \right)}_{(**)} dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_n \\ &\quad + (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{[0, \infty)} \frac{\partial(\omega_n \circ \varphi^{-1})}{\partial x_n} (x_1, \dots, x_n) dx_n \right)}_{(***)} dx_1 \dots dx_{n-1} \end{aligned}$$

Da $\text{supp}(\omega_i \circ \varphi^{-1}) \subset \varphi(U)$, konnten wir beim vorletzten Schritt den Integrationsbereich auf ganz \mathbb{R}_+^n ausdehnen, in dem wir $\omega_i \circ \varphi^{-1}$ glatt durch Null auf \mathbb{R}_+^n fortsetzen. Die letzte Identität gilt aufgrund des Satzes von Fubini.

Für $1 \leq i < n$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (**) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial(\omega_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} (x_1, \dots, x_n) dx_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow \infty} \omega_i(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) - \lim_{x_i \rightarrow -\infty} \omega_i(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) = 0, \end{aligned}$$

da der Träger $\text{supp}(\omega_i \circ \varphi^{-1}) \subset \varphi(U)$ kompakt ist.

Falls $i = n$, so gilt

$$\begin{aligned} (***) &= \int_0^\infty \frac{\partial(\omega_n \circ \varphi^{-1})}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_n \\ &= \lim_{x_n \rightarrow \infty} \omega_n(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) - \lim_{x_n \rightarrow 0} \omega_n(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \\ &= -\omega_n(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_M d\omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)) d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

(2) Berechnung von $\int_{\partial M} \omega$:

Ist $U \cap \partial M = \emptyset$, so gilt $\varphi(U) \subset \text{Int}(\mathbb{R}_+^n)$. Somit verschwindet $\omega_n \circ \varphi^{-1}$ auf dem Rand von \mathbb{R}_+^n und wir erhalten $\int_M d\omega = 0$. Da der Träger von ω in U liegt, ist dann auch $\omega|_{\partial M} = 0$,

also $\int_{\partial M} \omega = 0$. In diesem Fall gilt also die Formel (*).

Sei nun $U \cap \partial M \neq \emptyset$. Da $\text{supp} \omega \subset U$, ist $\text{supp} \omega|_{\partial M} \subset \partial M \cap U$. Ist $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte von M , so ist $(U \cap \partial M, \tilde{\varphi} := \varphi|_{U \cap \partial M} = (x_1, \dots, x_{n-1}))$ eine Karte von ∂M , da der Rand durch $x_n = 0$ charakterisiert ist. Wir wollen nun die Orientierungen der Karten (U, φ) und $(U \cap \partial M, \tilde{\varphi})$ miteinander vergleichen. Sei dazu $\nu : \partial M \rightarrow TM$ das Vektorfeld der äußeren Normale des Randes. Die folgenden Basen von $T_x M$ in einem Randpunkt $x \in \partial M$ sind gleichorientiert:

$$\begin{aligned} \left(\nu(x), \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(x) \right) &\sim \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(x), (-1)^{n-1} \nu(x) \right) \\ &\sim \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(x), (-1)^n \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right) \end{aligned}$$

da die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ und $\nu(x)$ nach Definition in verschiedene Richtungen bezüglich $T_x \partial M$ zeigen, $\nu(x)$ nach außen und $\frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ nach innen. Also ist die Karte $(U \cap \partial M, \tilde{\varphi})$ des Randes positiv orientiert, falls n gerade ist und negativ orientiert, falls n ungerade ist.

Für die lokale Darstellung von $\omega|_{U \cap \partial M}$ als $(n-1)$ -Form auf dem Rand ∂M bzgl. der Randkarte $(U \cap \partial M, \tilde{\varphi})$ gilt

$$\omega|_{U \cap \partial M} = \omega_{\tilde{\varphi}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1},$$

wobei

$$\begin{aligned} \omega_{\tilde{\varphi}} &= \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot (dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right) \\ &= \omega_n \cdot (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right) \\ &= \omega_n, \end{aligned}$$

da $dx_n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = 0$, wenn $j \neq n$. Wir erhalten also für ω , betrachtet als $(n-1)$ -Form auf ∂M :

$$\omega|_{U \cap \partial M} = \omega_n \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \in \Omega^{n-1}(\partial M).$$

(a) Sei n gerade. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} \omega &= \int_{U \cap \partial M} \omega_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} = \int_{\tilde{\varphi}(U \cap \partial M)} \omega_n \circ \tilde{\varphi}^{-1} d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)) d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).\end{aligned}$$

(b) Ist n ungerade, so ist

$$\int_{\partial M} \omega \stackrel{10.34}{=} - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)) d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Damit ist die Behauptung $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ bewiesen. \square

10.11.2 Der Gaußsche Integralsatz und die Greenschen Formeln

In diesem Abschnitt leiten wir weitere Integralsätze auf Mannigfaltigkeiten aus dem Satz von Stokes ab. Im gesamten Abschnitt sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine zusammenhängende, kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂M und $\nu : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^N$ das Vektorfeld der äußeren Normalen auf ∂M .

Satz 10.38 (Divergenz-Formel/Gaußscher Integralsatz)

Es sei X ein glattes Vektorfeld auf M und $f \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned}1. \quad & \int_M \operatorname{div}(X) dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M). \\ 2. \quad & \int_M f \cdot \operatorname{div}(X) dM + \int_M X(f) dM = \int_{\partial M} f \cdot \langle X, \nu \rangle d(\partial M).\end{aligned}$$

Beweis: Wir wissen aus Satz 10.28 bereits, daß

$$\operatorname{div}(X) dM = L_X dM := d(i_X dM) + i_X ddM = d(i_X dM)$$

gilt. Somit folgt aus dem Satz von Stokes

$$\int_M \operatorname{div}(X) dM = \int_{\partial M} i_X dM.$$

Wir wollen nun die Form $\omega := i_X dM$ als $(n-1)$ -Form auf dem Rand näher beschreiben. Für $x \in \partial M$ zerlegen wir den Vektor $X(x) \in T_x M$ in eine Normalen- und eine Tangentialkomponente an ∂M :

$$X(x) = \underbrace{\langle X(x), \nu(x) \rangle \nu(x)}_{\in T_x M, \perp T_x \partial M} + \underbrace{X^*(x)}_{\in T_x(\partial M)}$$

und erhalten

$$\omega_x = \iota_{X(x)} dM_x = \langle X(x), \nu(x) \rangle \cdot \iota_{\nu(x)} dM_x + \iota_{X^*(x)} dM_x.$$

Für Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_x(\partial M)$ gilt dann

$$\begin{aligned}\omega_x(v_1, \dots, v_{n-1}) &= \langle X(x), \nu(x) \rangle \cdot (\iota_{\nu(x)} dM_x)(v_1, \dots, v_{n-1}) + dM_x \underbrace{\langle X^*(x), v_1, \dots, v_{n-1} \rangle}_{\text{linear abhängig}} \\ &= \langle X(x), \nu(x) \rangle \cdot (\iota_{\nu(x)} dM_x)(v_1, \dots, v_{n-1}) + 0 \\ &\stackrel{10.29}{=} \langle X(x), \nu(x) \rangle \cdot (d\partial M)_x(v_1, \dots, v_{n-1}).\end{aligned}$$

Betrachtet man ω als $(n-1)$ -Form auf ∂M , so gilt folglich

$$\omega = \langle X, \nu \rangle d(\partial M) \in \Omega^{n-1}(\partial M)$$

und somit

$$\int_M \operatorname{div}(X) dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M).$$

Die zweite Formel folgt aus der ersten mit der Produktregel

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + X(f)$$

für die Divergenz (siehe Satz 10.21). □

Satz 10.39 (Greensche Formeln)

Seien f und h glatte Funktionen auf M . Dann gilt

$$\begin{aligned}1. \quad & \int_M h \cdot \Delta(f) dM + \int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle dM = \int_{\partial M} h \cdot \nu(f) d(\partial M), \\ 2. \quad & \int_M (h \cdot \Delta(f) - f \cdot \Delta(h)) dM = \int_{\partial M} (h \cdot \nu(f) - f \cdot \nu(h)) d(\partial M).\end{aligned}$$

Beweis: Gemäß Definition gilt $\Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$. Die Anwendung des Gaußschen Integralssatzes liefert

$$\begin{aligned}\int_M h \cdot \Delta(f) dM &= \int_M h \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) dM = \int_{\partial M} h \cdot \langle \operatorname{grad} f, \nu \rangle d(\partial M) - \int_M (\operatorname{grad} f)(h) dM \\ &= \int_{\partial M} h df(\nu) d(\partial M) - \int_M dh(\operatorname{grad} f) dM \\ &= \int_{\partial M} h \nu(f) d(\partial M) - \int_M \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f \rangle dM.\end{aligned}$$

Die zweite Formel folgt durch zweimaliges Anwenden des soeben bewiesenen. □

Als Anwendung der Greenschen Formeln sehen wir uns zwei weitere Eigenschaften des Laplace-Operators $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ an. Auf dem Vektorraum der glatten Funktionen $C^\infty(M)$ betrachten wir das L^2 -Skalarprodukt:

$$\langle f, h \rangle_{L^2} := \int_M f \cdot h dM, \quad f, h, \in C^\infty(M).$$

Eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ heißt *harmonisch*, wenn $\Delta(f) = 0$ gilt. Es gibt i.a. sehr viele harmonische Funktionen. Z.B. ist der Realteil und der Imaginärteil jeder holomorphen Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ harmonisch. Der nächste Satz zeigt, dass im Gegensatz dazu jede harmonische Funktion auf einer zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit ohne Rand konstant ist.

Satz 10.40 Sei M^n eine kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Dann gilt

$$1. \langle \Delta(f), h \rangle_{L^2} = \langle f, \Delta(h) \rangle_{L^2} \quad \text{für alle } f, h \in C^\infty(M).$$

(Man sagt dazu: Der Laplace-Operator Δ ist formal selbstadjungiert)

2. Ist $\Delta(f) \geq 0$ und M zusätzlich zusammenhängend, so ist f konstant. Insbesondere ist jede harmonische Funktion auf M konstant.

Beweis: Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der 2. Greenschen Formel, da $\partial M = \emptyset$. Sei nun $f \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion mit $\Delta(f) \geq 0$. Aus der formalen Selbstadjungiertheit des Laplace-Operators folgt

$$\langle \Delta(f), 1 \rangle_{L^2} = \langle f, \Delta(1) \rangle_{L^2} = 0$$

und somit

$$0 = \int_M \Delta(f) dM.$$

Da $\Delta(f) \geq 0$ und dM eine positive n -Form ist, folgt daraus $\Delta(f) = 0$. Das Anwenden der 1. Greenschen Formel ergibt

$$0 = \int_M f \Delta(f) dM = - \int_M \langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle dM = - \|\text{grad } f\|_{L^2}^2.$$

Folglich ist $\text{grad } f = 0$ und damit $df = 0$. Da M zusammenhängend ist, muß f also konstant sein. \square

10.11.3 Klassische Integralsätze im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

In diesem Abschnitt leiten wir aus dem Satz von Stokes einige klassische Integralsätze im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 ab, wie man sie oft in Büchern über Vektoranalysis findet. Zunächst ein Satz für Gebiete im \mathbb{R}^2 :

Satz 10.41 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit dem Rand $\partial G = \Gamma$ und bezeichne $X = (\xi_1, \xi_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld auf G . Desweiteren sei $\nu = (\nu_1, \nu_2) : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld der äußeren Normalen auf ∂G . Dann gilt

$$1. \int_G \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_\Gamma (\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2).$$

$$2. \int_G \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_\Gamma (\xi_1 \nu_1 + \xi_2 \nu_2) d\Gamma.$$

Beweis: Wir betrachten die 1-Form $\omega := \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \in \Omega^1(G)$. Dann gilt

$$d\omega = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge x_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge x_2 = \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2.$$

Die erste Behauptung folgt dann aus dem Satz von Stokes. Für die Divergenz des Vektorfeldes X gilt

$$\text{div}(X) = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}.$$

Die 2. Formel folgt somit ein Spezialfall der Divergenzformel. \square

Vor der Formulierung der klassischen Integralsätze im \mathbb{R}^3 erinnern wir nochmal an die Beziehungen zwischen den Operatoren *Divergenz*, *Gradient* und *Rotation* im \mathbb{R}^3 . Sei $W \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und $X : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld mit den Komponenten $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Die *Rotation von X* ist ein neues Vektorfeld auf W , das durch

$$\operatorname{rot}(X) := \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)$$

definiert ist. Die Divergenz von X ist durch

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}$$

gegeben. Für den Gradienten einer glatten Funktion $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right).$$

Aus Kapitel 6 kennen wir die folgenden Eigenschaften für die Rotation, die man schnell nochmal nachrechnet:

1. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(X)) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{X}(W)$,
2. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ für alle $f \in C^\infty(W)$,
3. $\operatorname{rot}(f \cdot X) = f \cdot \operatorname{rot}(X) + \operatorname{grad} f \times X$.

Mit dem Lemma von Poincare erhält man für ein Vektorfeld Y auf sternförmigen Mengen $W \subset \mathbb{R}^3$ darüber hinaus:

4. $\operatorname{div}(Y) = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{rot}(X) = Y$ für ein Vektorfeld X auf W .
5. $\operatorname{rot}(Y) = 0$ genau dann, wenn $Y = \operatorname{grad} f$ für eine Funktion f auf W .

Satz 10.42 (Klassischer Satz von Stokes für Flächen im \mathbb{R}^3)

Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, orientierte Fläche im \mathbb{R}^3 mit Rand ∂M . Es bezeichne

$$\begin{aligned} \mathbf{n} : M^2 &\longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \mathbf{n}(x) \perp T_x M^2 \end{aligned}$$

das der Orientierung von M entsprechende Einheitsnormalenvektorfeld von M und $\mathbf{t} : \partial M \rightarrow T(\partial M)$ das tangentielle Einheitsvektorfeld der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit ∂M , das der induzierten Orientierung des Randes entspricht. Sei $W \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von M und X ein auf W definiertes glattes Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{M^2} \langle \operatorname{rot}(X), \mathbf{n} \rangle dM = \int_{\partial M^2} \langle X, \mathbf{t} \rangle d(\partial M).$$

Beweis: Wir betrachten die zu X duale 1-Form

$$\omega = \sum_{i=1}^3 \xi_i dx_i \in \Omega^1(W)$$

und wenden darauf den Satz von Stokes an. Mit $\text{rot}(X) = (R_1, R_2, R_3)$ bezeichnen wir zur Abkürzung die Rotation von X . Dann gilt

$$\begin{aligned}
d\omega &= d\xi_1 \wedge dx_1 + d\xi_2 \wedge dx_2 + d\xi_3 \wedge dx_3 \\
&= \partial_2(\xi_1)dx_2 \wedge dx_1 + \partial_3(\xi_1)dx_3 \wedge dx_1 + \partial_1(\xi_2)dx_1 \wedge dx_2 \\
&\quad + \partial_3(\xi_2)dx_3 \wedge dx_2 + \partial_1(\xi_3)dx_1 \wedge dx_3 + \partial_2(\xi_3)dx_2 \wedge dx_3 \\
&= (\partial_2(\xi_3) - \partial_3(\xi_2))dx_2 \wedge dx_3 + (\partial_3(\xi_1) - \partial_1(\xi_3))dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + (\partial_1(\xi_2) - \partial_2(\xi_1))dx_1 \wedge dx_2 \\
&= R_1 dx_2 \wedge dx_3 + R_2 dx_3 \wedge dx_1 + R_3 dx_1 \wedge dx_2.
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun

$$d\omega = \langle \text{rot}(X), \mathbf{n} \rangle dM, \quad (*)$$

$$\omega|_{\partial M} = \langle X, \mathbf{t} \rangle d(\partial M) \in \Omega^1(\partial M). \quad (**)$$

Sei dazu $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung von M . Dann gilt für das Normalenfeld

$$\mathbf{n}(\Phi(u)) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}(u)}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}(u) \right\|} \in \mathbb{R}^3, \quad u = (u_1, u_2),$$

und für die Volumenform

$$dM = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right\| du_1 \wedge du_2.$$

Nach Definition des alternierenden Produktes und des Vektorproduktes folgt außerdem für die 1. Komponente des Vektorproduktes

$$(dx_2 \wedge dx_3) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_2} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right)_1,$$

d.h. es gilt

$$dx_2 \wedge dx_3 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right)_1 du_1 \wedge du_2.$$

Analog rechnet man für die anderen Komponenten und erhält mit $\mathbf{n} = (N_1, N_2, N_3)$,

$$\begin{aligned}
N_1 dM &= dx_2 \wedge dx_3, \\
N_2 dM &= dx_3 \wedge dx_1, \\
N_3 dM &= dx_1 \wedge dx_2.
\end{aligned}$$

Folglich ist $\langle \text{rot}(X), \mathbf{n} \rangle dM = \sum_{i=1}^3 R_i N_i dM = d\omega$ und (*) gezeigt.

Sei nun $\mathbf{t} = (T_1, T_2, T_3)$. Da \mathbf{t} ein der Orientierung entsprechendes Einheitsvektorfeld auf dem Rand ∂M ist, folgt wegen $dx_i(\mathbf{t}) = T_i$ und $d(\partial M)(\mathbf{t}) = 1$

$$T_i d(\partial M) = dx_i \quad (\text{als 1-Form auf } \partial M).$$

Wir erhalten also für die Form $\omega|_{\partial M}$, betrachtet als 1-Form auf ∂M , die Formel (**):

$$\omega|_{\partial M} = \sum_{i=1}^3 \xi_i dx_i = \sum_{i=1}^3 \xi_i T_i d(\partial M) = \langle \mathbf{t}, X \rangle d(\partial M).$$

□

Wir wollen abschließend eine Reihe von Integralsätzen in einer Notation angeben, wie man sie in einigen Büchern zur klassischen Vektoranalysis findet. Dort werden oft die folgenden Bezeichnungen verwendet:

$$d\vec{s} := \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \in \Omega^1(W, \mathbb{R}^3)$$

heißt das *vektorielle Linienelement* auf W ,

$$d\vec{F} := \begin{pmatrix} dx_2 \wedge dx_3 \\ dx_3 \wedge dx_1 \\ dx_1 \wedge dx_2 \end{pmatrix} \in \Omega^2(W, \mathbb{R}^3)$$

heißt das *vektorielle Flächenelement* auf W und die übliche Volumenform

$$dV := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \in \Omega^3(W)$$

heißt das *Volumenelement* von W .

Ist $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ein Vektorfeld auf $W \subset \mathbb{R}^3$, so bezeichnen $X \cdot d\vec{s}$ bzw. $X \cdot d\vec{F}$ die 1- bzw. 2-Formen

$$X \cdot d\vec{s} := \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 + \xi_3 dx_3 \in \Omega^1(W)$$

$$X \cdot d\vec{F} := \xi_1 dx_2 \wedge dx_3 + \xi_2 dx_3 \wedge dx_1 + \xi_3 dx_1 \wedge dx_2 \in \Omega^2(W).$$

Die zu X duale 1-Form $\omega = \sum_{i=1}^3 \xi_i dx_i$ und ihr Differential $d\omega$ schreiben sich dann in der Form

$$\omega = X \cdot d\vec{s},$$

$$d\omega = \text{rot}(X) \cdot d\vec{F}.$$

Der Satz von Stokes ergibt dann

Satz 10.43 *Ist X ein glattes Vektorfeld auf einer offenen Menge $W \subset \mathbb{R}^3$ und $M^2 \subset W$ eine Fläche, so gilt*

$$\int_{M^2} \text{rot}(X) \cdot d\vec{F} = \int_{\partial M^2} X \cdot d\vec{s}.$$

Aus dem Mittelwertsatz erhalten wir:

Folgerung: *Sei $W \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, \mathbf{n} ein Einheitsvektor im \mathbb{R}^3 , $x_0 \in W$ ein fixierter Punkt und $K_\varepsilon(x_0)$ die Kreisscheibe vom Radius ε um x_0 in der zu \mathbf{n} orthogonalen Ebene durch x_0 . Dann gilt für die Rotation eines glatten Vektorfeldes X auf W*

$$\langle \text{rot}(X), \mathbf{n} \rangle(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{\partial K_\varepsilon(x_0)} X \cdot d\vec{s}$$

Diesen Grenzwert nennt man auch die *Wirbelstärke von X um \mathbf{n}* und $\text{rot}(X)(x_0)$ selbst auch *Wirbeldichte von X in x_0* . Ein Vektorfeld X heißt *wirbelfrei*, wenn $\text{rot}(X) = 0$ gilt. Ein Vektorfeld X auf einer sternförmigen Menge $W \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann wirbelfrei, wenn es eine glatte Funktion f auf W mit $X = \text{grad} f$ gibt. (siehe oben).

Man kann auch die Wirbeldichte selbst als den Grenzwert eines Integrals ausdrücken. Wir vereinbaren dazu die folgende Notation:

Ist V^3 eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 (d.h. ein Körper) und $B = (B_1, B_2, B_3)$ ein Vektorfeld auf V^3 . Dann bezeichne

$$\int_V B \, dV := \left(\int_V B_1 \, dV, \int_V B_2 \, dV, \int_V B_3 \, dV \right).$$

Satz 10.44 Sei $V^3 \subset \mathbb{R}^3$ eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 mit dem Rand $\partial V^3 = M^2$. Sei X ein Vektorfeld auf V^3 und $\nu : \partial V^3 = M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld der äußeren Normalen des Randes von V . Dann gilt

$$\int_{V^3} \operatorname{rot}(X) \, dV = - \int_{M^2} (X \times \nu) \, dM.$$

Beweis: Sei $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Wir definieren auf V eine 2-Form ω mit Werten in \mathbb{R}^3 durch:

$$\omega := (-\xi_3 \, dx_1 \wedge dx_3 - \xi_2 \, dx_1 \wedge dx_2, \xi_1 \, dx_1 \wedge dx_2 - \xi_2 \, dx_2 \wedge dx_3, \xi_2 \, dx_2 \wedge dx_3 + \xi_1 \, dx_1 \wedge dx_3).$$

Dann rechnet man leicht aus, daß

$$d\omega = \operatorname{rot}(X) \, dV = \operatorname{rot}(X) \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Wir haben zu zeigen, daß

$$\omega|_M = -(X \times \nu) \, dM \quad (\text{als 2-Form auf } M = \partial V).$$

Nach Definition stimmt das Vektorfeld der äußeren Normale $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit dem Einheitsnormalenvektorfeld $\mathbf{n} = (N_1, N_2, N_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ von $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ überein. Aus dem Beweis von Satz 10.42 wissen wir deshalb bereits, dass

$$N_1 \, dM = dx_2 \wedge dx_3, \quad N_2 \, dM = dx_3 \wedge dx_1 \quad \text{und} \quad N_3 \, dM = dx_1 \wedge dx_2.$$

Setzen wir dies in die Definition von ω ein, so erhalten wir

$$\omega|_M = (\xi_3 N_2 - \xi_2 N_3, \xi_1 N_3 - \xi_3 N_1, \xi_2 N_1 - \xi_1 N_2) \, dM = -(X \times \mathbf{n}) \, dM.$$

Nun folgt die Behauptung aus dem Satz von Stokes. □

Aus dem Mittelwertsatz folgt

Folgerung: Sei X ein Vektorfeld in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und bezeichne $S_\varepsilon^2(x_0)$ die Sphäre um x_0 vom Radius ε . Dann gilt

$$\operatorname{rot}(X)(x_0) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{S_\varepsilon^2(x_0)} (X \times \nu) \, dS_\varepsilon^2.$$

Analog zu Satz 10.43 können wir auch die Divergenzformel aus Satz 10.38 in der klassischen Form schreiben und erhalten

Satz 10.45 Sei V^3 eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 mit dem Rand $\partial V^3 = M^2$ und $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ein glattes Vektorfeld auf V . Dann gilt

$$\int_V \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right) \, dV = \int_M X \cdot d\vec{F}$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt

Folgerung: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und X ein glattes Vektorfeld, das auf einer Umgebung von x_0 definiert ist. Bezeichne $S_\varepsilon^2(x_0)$ die Sphäre um x_0 vom Radius ε . Dann gilt

$$\operatorname{div}(X)(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{S_\varepsilon^2(x_0)} X \cdot d\vec{F}.$$

Interpretiert man X als das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden, inkompressiblen Flüssigkeit, dann ist $\int_{\partial V} X \cdot d\vec{F}$ die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit vom Strömungsfeld X durch den Rand ∂V transportiert wird und die Zahl

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}(V)} \int_{\partial V} X \cdot d\vec{F}$$

beschreibt die Ergiebigkeit des Feldes X in V . Nach der vorstehenden Folgerung mißt also $\operatorname{div}(X)(x_0)$ die "Quelldichte" von X . Ein Vektorfeld X heißt *quellenfrei*, falls $\operatorname{div}(X) = 0$ gilt. Wirbelfelder $\operatorname{rot}(B)$ sind quellenfrei. Ein auf einem sternförmigen Gebiet W definiertes Vektorfeld X ist genau dann quellenfrei, wenn es ein Vektorfeld B auf W mit $X = \operatorname{rot}(B)$ gibt (siehe oben).

Aus dem Gaußschen Integralsatz (Satz 10.38) folgt ein weiterer klassischer Integralsatz, nämlich

Satz 10.46 Sei V^3 eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 mit Rand $\partial V = M^2$, $\nu = (N_1, N_2, N_3)$ das Vektorfeld der äußeren Normalen auf M^2 und f eine glatte Funktion auf V . Dann gilt

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV^3 = \int_M f \cdot N_i dM.$$

Beweis: Wir wenden die 2. Formel von Satz 10.38 auf das Vektorfeld $X = \frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$ an. Da für dieses Feld $\operatorname{div}(X) = 0$ gilt, erhalten wir

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \int_{\partial V} f \cdot \langle e_i, \nu \rangle d\partial V = \int_M f \cdot N_i dM$$

□

Aus dem Mittelwertsatz folgt dann

Folgerung: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $S_\varepsilon^2(x_0)$ die Sphäre um x_0 vom Radius ε , ν die Abbildung der äußeren Normale auf S_ε^2 und f eine glatte Funktion auf einer Umgebung von x_0 . Dann gilt

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{S_\varepsilon^2} f \cdot \nu dS_\varepsilon^2.$$

□

10.11.4 Drei typische Anwendungen des Satzes von Stokes

Der Satz von Stokes ist einer der zentralen Sätze in der Integrationstheorie. Er hat sehr vielfältige Anwendungen in Geometrie, Analysis und mathematischer Physik. Drei Anwendungen werden wir jetzt zeigen. In den Vorlesungen des Hauptstudiums (z.B. Differentialgeometrie) wird man weiteren Anwendungen mit wichtigen inhaltlichen Konsequenzen begegnen.

Berechnung des Volumens der Kugel:

Sei $D_r^n \subset \mathbb{R}^n$ die Vollkugel vom Radius r in \mathbb{R}^n , also $D_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ und $S_r^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$ ihr Rand, die $n-1$ -dimensionale Sphäre vom Radius r . In Kapitel 9.8 haben wir bereits das Volumen der Kugel berechnet

$$\text{Vol}(D_r^n) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{(\frac{n}{2})!}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} r^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Satz 10.47 Für das Volumen der Sphäre gilt

$$\text{Vol}(S_r^{n-1}) = \frac{n}{r} \cdot \text{Vol}(D_r^n).$$

Beweis: Es gilt $\partial D_r^n = S_r^{n-1}$ und $\text{Vol}(S_r^{n-1}) = \int_{S_r^{n-1}} dS_r^{n-1}$. Wir betrachten auf D_r^n die Euklidischen Koordinaten (x_1, \dots, x_n) . Dann ist die Volumenform von D_r^n gegeben durch

$$dD_r^n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

und das Vektorfeld der äußeren Normalen auf dem Rand S_r^{n-1} von D_r^n durch

$$\nu(x) = \frac{x}{r} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \quad x \in S_r^{n-1}$$

Aus Satz 10.29 folgt nun

$$\begin{aligned} (dS_r^{n-1})_x &= i_{\nu(x)}(dD_r^n)_x \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{r} i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j \underbrace{\left(dx_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right)}_{=1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Bezeichne ω die $(n-1)$ -Form

$$\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Für ihr Differential gilt

$$d\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = \sum_{j=1}^n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = n dD_r^n$$

Somit erhalten wir mit dem Satz von Stokes für das Volumen der Sphäre

$$\text{Vol}(S_r^{n-1}) = \int_{S_r^{n-1}} dS_r^{n-1} = \frac{1}{r} \int_{S_r^{n-1}} \omega = \frac{1}{r} \int_{D_r^n} d\omega = \frac{n}{r} \int_{D_r^n} dD_r^n = \frac{n}{r} \text{Vol}(D_r^n)$$

□

Für eine weitere geometrische Anwendung des Satzes von Stokes erinnern wir an den Begriff der homotopen Abbildungen.

Definition. Seien f_0 und $f_1 : M \rightarrow N$ zwei glatte Abbildungen zwischen den Untermannigfaltigkeiten M und N . f_0 und f_1 heißen *glatt-homotop zueinander*, falls eine C^∞ -Abbildung $H : [0, 1] \times M \rightarrow N$ existiert, so daß $H(0, x) = f_0(x)$ und $H(1, x) = f_1(x)$ gilt. Das heißt, man hat eine Schar von Abbildungen $f_t : M \rightarrow N$ mit $f_t(x) = H(t, x)$, die f_0 in f_1 überführen. Bezeichnung: $f_0 \sim_H f_1$.

Satz 10.48 Seien M^n und N^n kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeiten ohne Rand und ω eine n -Form mit kompaktem Träger auf N . Sind $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ zwei glatt-homotope Abbildungen, so gilt

$$\int_{M^n} f_0^* \omega = \int_{M^n} f_1^* \omega.$$

Beweis: Sei $I = [0, 1]$. Der Rand der Untermannigfaltigkeit $I \times M$ ist gegeben durch $\partial(I \times M) = M \cup (-M)$, wobei $-M$ die Untermannigfaltigkeit M mit entgegengesetzter Orientierung ist. Also folgt aus $f_0 \sim_H f_1$, daß

$$\int_{\partial(I \times M)} H^* \omega = \int_M f_0^* \omega + \int_{-M} f_1^* \omega = \int_M f_0^* \omega - \int_M f_1^* \omega.$$

Andererseits ergibt das Anwenden des Satzes von Stokes

$$\int_{\partial(I \times M)} H^* \omega = \int_{I \times M} d(H^* \omega) = \int_{I \times M} H^* d\omega = 0,$$

da $d\omega \in \Omega^{n+1}(N^n) = \{0\}$. Somit erhalten wir $\int_M f_0^* \omega = \int_M f_1^* \omega$. □

Wir zeigen jetzt, dass man "einen Igel nicht kämmen kann".

Satz 10.49 (Igelsatz) Jedes Vektorfeld X auf einer Sphäre $S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ gerader Dimension hat mindestens eine Nullstelle, d.h. es existiert ein $x \in S^{2n}$ mit $X(x) = 0$.

Bemerkung: Auf Sphären ungerader Dimension ist dieser Satz falsch; man betrachte etwa das Vektorfeld $X(x_1, \dots, x_{2n+2}) := (x_2, -x_1, x_3, -x_4, \dots, x_{2n+2}, -x_{2n+1})$.

Beweis von Satz 12.38: Sei X ein Vektorfeld auf S^n . Angenommen X habe keine Nullstelle. Mit τ bezeichnen wir die sogenannte antipodale Abbildung, definiert durch $\tau(x) := -x$. Da X keine Nullstelle hat, erhalten wir durch

$$H(t, x) := \cos(\pi t) x + \sin(\pi t) \frac{X(x)}{\|X(x)\|}$$

eine glatte Homotopie zwischen der Identität und der antipodalen Abbildung τ . Aus Satz 10.48 folgt dann

$$\int_{S^n} dS^n = \int_{S^n} \tau^* dS^n. \quad (*)$$

Wir drücken jetzt die n -Form $\tau^* dS^n$ durch die Volumenform der Sphäre aus. Die Orientierung auf der Sphäre S^n sei durch das Einheitsnormalenfeld $\mathbf{n}(x) = x$ festgelegt, d.h. es gilt

$$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathcal{O}_{T_x S^n} \iff (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, x) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{n+1}} \quad (**)$$

Sei nun (e_1, \dots, e_n) eine positiv orientierte orthonormale Basis in $T_x S^n$. Dann ist (e_1, \dots, e_n) auch eine orthonormale Basis in $T_{-x} S^n$, die wegen $(**)$ negativ orientiert ist. Wir erhalten also für die n -Form $\tau^* dS^n$

$$\begin{aligned} (\tau^* dS^n)_x(e_1, \dots, e_n) &= dS_{-x}^n(-e_1, \dots, -e_n) = (-1)^n dS_{-x}^n(e_1, \dots, e_n) \\ &= (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1} dS_x^n(e_1, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\tau^* dS^n = (-1)^{n+1} dS^n$$

und für das Volumen der Sphäre würde aus $(*)$ folgen

$$\text{Vol}(S^n) = \int_{S^n} dS^n = \int_{S^n} \tau^* dS^n = (-1)^{n+1} \int_{S^n} dS^n = (-1)^{n+1} \text{Vol}(S^n).$$

Dies ist für gerade Dimensionen n ein Widerspruch. □

10.12 Wiederholungsfragen zur Prüfungsvorbereitung

Die folgenden Fragen fassen den in Kapitel 10 behandelten Stoff zusammen. Sie sollen die Vorbereitung auf die Analysisprüfung erleichtern. Bei der Beantwortung der Fragen sollten Sie folgendes beachten: Zu getroffenen Aussagen sollten Sie Beweise bzw. kurze Beweisideen kennen, mathematische Begriffe sollten Sie an Beispielen bzw. Gegenbeispielen erläutern können. Außerdem sollten Sie den Vorlesungsstoff auf die Lösung von Aufgaben anwenden können (wie in der Übung behandelt bzw. in den wöchentlichen Hausaufgaben gestellt wurden).

1. Definieren Sie den Begriff der Untermannigfaltigkeit (UMF) des \mathbb{R}^n (mit und ohne Rand). Welche Eigenschaften haben das Innere und der Rand einer Untermannigfaltigkeit? Welche Beispiele kennen Sie? Wie kann man Untermannigfaltigkeiten beschreiben (durch Gleichungen, Graphen oder lokale Parametrisierungen)?
2. Definieren Sie den Tangentialraum und den Cotangentialraum einer Untermannigfaltigkeit M in einem Punkt $x \in M$. Welche Eigenschaften haben diese Räume? Wie kann man sie berechnen?
3. Definieren Sie den Begriff einer differenzierbaren (C^k, C^∞) Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten. Welche Eigenschaften haben differenzierbare Abbildungen?
4. Definieren Sie das Differenzial einer differenzierbaren Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten. Welche Eigenschaften hat dieses Differenzial? Warum verallgemeinert es das Differenzial einer differenzierbaren Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, wie es in Kapitel 6 definiert wurde?
5. Was versteht man unter der kanonischen Basis im Tangentialraum $T_x M$ bezüglich einer Karte um $x \in M$? Wie erhält man die duale Basis in $T_x^* M$ dazu (Beweis)?. Wie lauten die Transformationsformeln zwischen kanonischen Basen bzw. Cobasen zu verschiedenen Karten?
6. Was versteht man unter einem Vektorfeld auf einer Untermannigfaltigkeit? Definieren Sie die Richtungsableitung einer Funktion nach einem Vektorfeld. Was ist der Kommutator zweier Vektorfelder und welche Eigenschaften hat er?
7. Was versteht man unter der induzierten Riemannschen Metrik einer Untermannigfaltigkeit? Was sind ihre lokalen Koeffizienten? (Beispiele)
8. Definieren Sie die Begriffe Gradient, Divergenz und Laplace-Operator für Funktionen bzw. Vektorfelder einer Untermannigfaltigkeit. Nennen Sie Eigenschaften dieser Operationen (Produktregeln, lokale Formeln).
9. Was versteht man unter einer k -Form auf einer Untermannigfaltigkeit? Welche Operationen für k -Formen kennen Sie (Induzieren, alternierendes Produkt, lokale Darstellung, Differenzial einer k -Form, inneres Produkt, Lie-Ableitung)? Nennen Sie deren wichtigste Rechenregeln.
10. Was versteht man unter einer Orientierung auf einer Untermannigfaltigkeit? Welche Kriterien für die Orientierbarkeit von Untermannigfaltigkeiten kennen Sie? Nennen Sie Beispiele für orientierbare und nicht orientierbare Untermannigfaltigkeiten.

11. Definieren Sie die Volumenform einer orientierten Untermannigfaltigkeit. Welche Eigenschaften hat diese Form (lokale Darstellung, Beziehung zwischen der Volumenform von M und der Volumenform des Randes ∂M)?
12. Definieren Sie das Integral einer n -Form über einer meßbaren Teilmenge einer n -dimensionalen Untermannigfaltigkeit. Welche Eigenschaften hat dieses Integral? Wie kann man es berechnen?
13. Definieren Sie das Volumen einer meßbaren Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit. Geben Sie für die Definition eine geometrische Interpretation. Wie berechnet man dieses Volumen?
14. Formulieren und beweisen Sie den Satz von Stokes (für Integrale von Formen über UMF). Welche Anwendungen kennen Sie?
15. Nennen und beweisen Sie spezielle Integralsätze, die aus dem Satz von Stokes folgen. Welche Eigenschaften des Laplace-Operatores erhält man aus diesen Sätzen?

10.13 Weitere Literatur zur Vorlesung

- K. Königsberger: Analysis 2, Springer, Kapitel 11, 13.
- Th. Bröcker: Analysis III, Kapitel IV -VI, Wissenschaftsverlag 1992.
- O. Forster: Analysis III, Vieweg-Teubner, Kapitel 14 ff, insb. 19-21
- K. Jänich: Vektoranalysis. Springer 1992
- H. Flanders: Differential forms. With applications to physical sciences. Academic Press, 1963
- M. P. Do Carmo: Differential forms and applications. Springer, Berlin 1994.
- I. Agricola, T. Friedrich: Vektoranalysis. Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik, Vieweg-Teubner 2010

10.14 Übungsaufgaben

Aufgabe 10.1

Zeigen Sie, dass der Zylinder $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ist. Geben Sie lokale Parametrisierungen an, die den Zylinder überdecken.

Aufgabe 10.2

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine C^∞ -Funktion. Beweisen Sie, dass die Rotationsfläche

$$M^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = f(z)^2\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ist. (Skizze)

Aufgabe 10.3

Beweisen Sie, dass das Kathenoid

$$M^2 = \{(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ist. (Skizze)

Aufgabe 10.4

a) Zeigen Sie, dass der Kegel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

keine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ist. (Skizze)

b)* Zeigen Sie dass die Neilsche Parabel

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2\}$$

keine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 ist. (Skizze)

Aufgabe 10.5

Zeigen sie, dass folgende Gruppen $G \subset gl(\mathbb{R}^n)$ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n^2} \simeq gl(\mathbb{R}^n)$ sind. Bestimmen Sie ferner deren Dimension und die Tangentialräume im Einselement.

a) $G = SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in gl(\mathbb{R}^n) \mid \det M = 1\}$ (spezielle lineare Gruppe)¹.

b) $G = O(n) = \{M \in gl(\mathbb{R}^n) \mid M \cdot M^t = id\}$ (orthogonale Gruppe).

Aufgabe 10.6

Betrachte die Wendelfläche

$$M^2 := \{\Phi(u, v) := (v \cos u, v \sin u, u) \in \mathbb{R}^3 \mid v, u \in \mathbb{R}, v > 0\}$$

Sei $u_0 \in \mathbb{R}$ fixiert und bezeichne $\varphi(v)$ den Winkel zwischen der Tangentialebene $Tan_{\Phi(u_0, v)} M^2$ und der z-Achse. Beweisen Sie,

$$\varphi(v) = \arctan(|v|)$$

¹Wird in der Übung besprochen.

Aufgabe 10.7

Sei $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion und $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M^2 := \text{graph}(h)$. Zeigen Sie, dass die Tangentialebene durch einen Punkt $p = (u_0, v_0, h(u_0, v_0)) \in M^2$ gegeben ist durch

$$\text{Tan}_p M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - u_0) \frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) + (y - v_0) \frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0) = z - h(u_0, v_0) \right\}$$

Aufgabe 10.8

Seien $X, Y : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$X(x, y, z) = (-y, x, 0), \quad Y(x, y, z) = (-z, 0, x)$$

- Zeigen Sie, dass X und Y glatte Vektorfelder auf S^2 sind.
- Berechnen Sie den Kommutator von X und Y .
- Geben Sie die Komponenten des Vektorfeldes X bezüglich der durch die sphärischen Koordinaten gegebenen Karte an.
- Berechnen Sie die Richtungsableitung $X(f)$ für die Funktion $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z$.
- Zeigen Sie: Es existiert keine Funktion $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $X = \text{grad}(h)$.

Aufgabe 10.9

Seien X, Y, Z Vektorfelder und f, g Funktionen auf einer Untermannigfaltigkeit. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften für den Kommutator von Vektorfeldern:

- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi-Identität)
- $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$
- $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

Aufgabe 10.10

- Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge. Sei $F = (F_1, F_2, F_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld auf U , so definieren wir dessen *Rotation* als ein neues Vektorfeld auf U durch

$$\text{rot}(F) := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

Beweisen Sie folgende Formeln, wobei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$:

- $\text{div}(\text{rot}(F)) = 0$
- $\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$
- $\text{rot}(f \cdot F) = f \cdot \text{rot}(F) + \text{grad}(f) \times F$

- b) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $f, h \in C^\infty(M)$ und $V \in \mathfrak{X}(M)$. Wir definieren den *Laplace-Operator* Δ als

$$\Delta(f) := \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$$

Beweisen Sie die folgenden *Produktregeln*:

- $\operatorname{grad}(f \cdot h) = f \cdot \operatorname{grad}(h) + h \cdot \operatorname{grad}(f)$
- $\operatorname{div}(f \cdot V) = f \cdot \operatorname{div}(V) + V(f)$
- $\Delta(f \cdot h) = f \cdot \Delta(h) + h \cdot \Delta(f) + 2\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(h) \rangle$

Aufgabe 10.11 (Stereographische Projektion)

- a) Bezeichne $N = \{(0, \dots, 0, 1)\}$ den Nordpol der Sphäre S^n und sei $h : S^n \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^n$ die auf folgende Weise definierte Abbildung:

$$h(x) := \{ \text{Gerade durch } N \text{ und } x \} \cap \{ \text{Ebene } x_{n+1} = 0 \}$$

Geben Sie Formeln für h und h^{-1} und zeigen Sie, dass h^{-1} eine Parametrisierung von $S^n \setminus N$ ist.

- b)* Beschreiben Sie das Bild unter h^{-1} von Hyperebenen $E^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ bzw. Hypersphären $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.
- c) Geben Sie die Koeffizienten der Riemannschen Metrik, den Gradienten einer Funktion $f \in C^\infty(S^n)$, die Divergenz eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(S^n)$ und den Laplace-Operator von f in der durch die stereographische Projektion h gegebenen Karte auf $S^n \setminus N$ an.

Aufgabe 10.12

Bestimmen Sie alle nur vom Abstand zum Nullpunkt $r(x) = d(x, 0) = \|x\|$ abhängenden Funktionen $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Gleichung $\Delta f = 0$ erfüllen (harmonische Funktionen).

Aufgabe 10.13

- a) Berechnen Sie das äußere Differential folgender Formen im \mathbb{R}^3 :

$$1) \omega^1 = e^x \cos(y) dx - e^x \sin(y) dy$$

$$2) \omega^2 = xy dx \wedge dy + 2x dy \wedge dz + 2y dx \wedge dz$$

$$3) \omega^2 = z dx \wedge dy + x dy \wedge dz + y dx \wedge dz$$

- b) Sei $\omega^1 = f(x, y) dx + g(x, y) dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ eine 1-Form auf \mathbb{R}^2 . Beweisen Sie:

$$\omega^1 \text{ ist geschlossen} \iff \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Bestimmen Sie alle Funktionen $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ die $d\alpha = \omega^1$ erfüllen, sowie alle 1-Formen η^1 mit $d\eta^1 = y dx \wedge dy$.

- c) Finden Sie ein analoges Kriterium für Geschlossenheit einer 1-Form auf dem \mathbb{R}^n .

d) Sei $\sigma \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ die 1-Form

$$\sigma = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Beweisen Sie, dass σ geschlossen, aber nicht exakt ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Geben Sie eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ an, auf der σ exakt ist (U möglichst groß!).

Aufgabe 10.14 (Lemma von Poincare)

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst sternförmig, falls ein Punkt $x_0 \in A$ existiert, so dass $\forall x \in A$ auch die Strecke $\overline{x_0 x}$ in A liegt. Beweisen Sie:

Auf einer offenen und sternförmigen Menge U ist jede geschlossene k -Form exakt ($k \geq 1$).

Hinweis: OBdA kann man $x_0 = 0$ wählen. Betrachten Sie die $(k-1)$ -Form I_ω auf U , definiert durch

$$I_\omega(x) := \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \right) \cdot x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

und zeigen Sie, dass $dI_\omega = \omega$ gilt.

Aufgabe 10.15

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene sternförmige Menge und X ein Vektorfeld auf U . Beweisen Sie:

$$\operatorname{rot} X = 0 \iff \text{es existiert } f \in C^\infty(U) \text{ mit } \operatorname{grad} f = X$$

Hinweis: Wenden Sie Aufgabe 9.14 auf die 1-Form ω_X , definiert durch $\omega_X(Y) = \langle X, Y \rangle$, an.

Aufgabe 10.16 (Maxwell-Gleichungen)

Zur Beschreibung zeitabhängiger elektromagnetischer Vorgänge im Vakuum werden folgende mathematische Begriffe benutzt:

$$\begin{aligned} \bullet E &= \sum_{i=1}^3 E_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} & (\text{elektrisches Feld}) & \bullet \rho(x, t) & (\text{Ladungsdichte}) \\ \bullet B &= \sum_{i=1}^3 B_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} & (\text{magnetisches Feld}) & \bullet J = \sum_{i=1}^3 J_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} & (\text{Stromdichte}) \end{aligned}$$

Die Relationen zwischen diesen Feldern sind durch die experimentell begründeten Maxwell-Gleichungen gegeben, die bei geeigneter Normierung der physikalischen Konstanten folgendes besagen:

- (1) $\operatorname{div}(B) = 0$ (B besitzt keine Quelle)
- (2) $\operatorname{rot} E + \frac{\partial}{\partial t}(B) = 0$ (Faraday-Gesetz)
- (3) $\operatorname{rot} B - J - \frac{\partial}{\partial t}(E) = 0$ (Ampère-Gesetz)
- (4) $\operatorname{div} E = \rho$ (Gauss-Gesetz)

Wir setzen $\frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{\partial}{\partial t}$ und betrachten $E, B, J \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$ als glatte Vektorfelder auf \mathbb{R}^4 sowie $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Ferner definieren wir für ein Vektorfeld $F = \sum_{i=1}^3 F_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$ und eine 2-Form $\alpha^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$:

$$1. \omega_F^1 := \sum_{i=1}^3 F_i dx^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$$

$$2. \omega_F^2 := F_1 dx^2 \wedge dx^3 + F_2 dx^3 \wedge dx^1 + F_3 dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$$

$$3. \delta(\alpha^2) := \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \kappa_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) dx^j \quad \text{wobei } \kappa_i = \begin{cases} -1 & \text{für } i = 1, 2, 3 \\ 1 & \text{für } i = 4 \end{cases}$$

Zeigen Sie dann, dass für die 2-Form $\eta^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ definiert durch

$$\eta^2 := \omega_E^1 \wedge dt + \omega_B^2$$

folgendes gilt:

$$1. d\eta^2 = 0 \iff 1) \text{ und } 2) \quad (\text{in der Übung behandelt})$$

$$2. \delta\eta^2 = \omega_J^1 - \rho dt \iff 3) \text{ und } 4)$$

Aufgabe 10.17

Berechnen Sie die lokale Darstellung der Volumenform für folgende Flächen im \mathbb{R}^3 :

a) Rotationsfläche

$$R_f(a, b) = \{ (f(z) \cos(v), f(z) \sin(v), z) \in \mathbb{R}^3 \mid (v, z) \in \mathbb{R} \times (a, b) \},$$

wobei $f \in C^\infty((a, b))$ und $f > 0$.

b) Rotationstorus

$$T^2 = \{ ((r_1 + r_2 \cos u) \cos v, (r_1 + r_2 \cos u) \sin v, r_2 \sin u) \mid (v, u) \in \mathbb{R}^2 \},$$

wobei $r_1 > r_2 > 0$.

c) Wendelfläche

$$W = \{ (r \cos v, r \sin v, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (v, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \}.$$

d) Kugel vom Radius $r > 0$

$$S^2(r) = \{ (r \cos v \cos u, r \sin v \cos u, r \sin u) \in \mathbb{R}^3 \mid (v, u) \in \mathbb{R}^2 \}$$

e) Graph einer Funktion $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\Gamma(F) = \{ (u, v, F(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Aufgabe 10.18

Beweisen Sie die folgende Formel für die Volumenform auf der Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (wobei S^n durch das nach außen zeigende Normalenvektorfeld orientiert sei) :

$$dS_x^n(v_1, \dots, v_n) = \langle x, v_1 \times \dots \times v_n \rangle, \quad v_1, \dots, v_n \in T_x S^n$$

Aufgabe 10.19

Berechnen Sie die Oberflächen der folgenden Flächen:

a) Rotationstorus

$$T^2 = \{ ((r_1 + r_2 \cos u) \cos v, (r_1 + r_2 \cos u) \sin v, r_2 \sin u) \mid (v, u) \in \mathbb{R}^2 \},$$

wobei $r_1 > r_2 > 0$.

- b) Kugel vom Radius $r > 0$
 $S^2(r) = \{ (r \cos v \cos u, r \sin v \cos u, r \sin v) \in \mathbb{R}^3 \mid (v, u) \in \mathbb{R}^2 \}$
- c) Wendelfläche
 $W = \{ (r \cos v, r \sin v, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (v, r) \in [0, 4\pi] \times (0, 2) \}$.
- d) Kegel
 $K := \{ (r \cos \theta, r \sin \theta, r) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \}$.

Aufgabe 10.20

Berechnen Sie die Fläche des Graphen der Funktion $f : [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$$

Aufgabe 10.21

Bestimmen Sie die Oberflächen der folgenden Rotationsflächen $R_f(a, b)$ (vgl. 11.17a):

- $f(z) = z, 0 < a < b$.
- $f(z) = e^{-z}, (a, b) = (0, \infty)$.
- $f(z) = z^{-\alpha}, (a, b) = (1, \infty)$. Für welche $\alpha > 0$ ist die Oberfläche endlich?

Aufgabe 10.22

- a) Berechnen Sie das Volumen des *Viviani-Körpers*, also des Durchschnitts des Vollzylinders
 $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \frac{R}{2})^2 + y^2 \leq (\frac{R}{2})^2\}$ mit der Kugel $B^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.
- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der *Viviani-Fläche*, also des Durchschnitts des Vollzylinders
 Z wie in a) mit der Sphäre $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

Aufgabe 10.23

Es sei $K = R_{\cosh^2 z}(-\infty, +\infty)$ das Katenoid und T^2 der Rotationstor. Berechnen Sie folgende Integrale:

$$a) \int_K \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dK \quad \text{und} \quad b) \int_{T^2} z dx \wedge dy.$$

Aufgabe 10.24

Sei $\eta = z^2 dx \wedge dy$ eine 2-Form im \mathbb{R}^3 , und sei $\bar{S} = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ die obere Hälfte der orientierten Einheitskugel $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\bar{S}} \eta$$

Aufgabe 10.25

Sei S die orientierte Fläche $S := \{(u + v, u^2 - v^2, u \cdot v) \mid u, v \in [0, 1]\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_S x \, dy \wedge dz + y \, dx \wedge dy$$

Aufgabe 10.26

Berechnen Sie das Integral

$$\int_E \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \, dE,$$

wobei E die Ellipsoidfläche $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ bezeichne.

Aufgabe 10.27

T sei der Körper, der durch die xy -Ebene, die xz -Ebene, die yz -Ebene und die Ebene $2x + 3y + 6z = 12$ begrenzt ist. Berechnen Sie

$$\int_{\partial T} F_1 \, dx \wedge dy + F_2 \, dy \wedge dz + F_3 \, dz \wedge dx$$

direkt und nach dem Satz von Stokes² für:

- a) $F_1 = 3y, F_2 = 18z, F_3 = -12$
- b) $F_1 = z, F_2 = x^2, F_3 = y$

Aufgabe 10.28

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{F} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ mit $\mathbf{F}(x, y, z) := (2x, y^2, z^2)$. Ferner bezeichne $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-dimensionale Sphäre vom Radius 1. \mathbf{n} sei das Vektorfeld der äußeren Normalen. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes das Integral

$$\int_{S^2} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, dS^2$$

Aufgabe 10.29

Berechnen Sie mit Hilfe des Stokesschen Satzes das Integral

$$\int_C -y^3 \, dx + x^3 \, dy - z^3 \, dz$$

C ist die Schnittmenge des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ mit der Ebene $x + y + z = 1$, die Orientierung entspricht der Bewegung gegen den Uhrzeigersinn in der xy -Ebene.

²**Bemerkung:** ∂T ist KEINE glatte Untermannigfaltigkeit, lässt sich aber aus solchen zusammengesetzten. Der Satz von Stokes darf hier trotzdem angewendet werden indem man das Integral $\int_{\partial T}$ für die einzelnen glatten Randstücke berechnet.

Aufgabe 10.30

Verifizieren Sie den Stokesschen Integralsatz für die Fläche $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ und das Vektorfeld $X(x, y, z) = (x, y, z)$, d.h. zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass gilt

$$\int_B \operatorname{rot}(X) \cdot d\vec{F} = \int_{\partial B} X \cdot d\vec{s}.$$

Aufgabe 10.31

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein ebenes beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂D . Mit $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial D$ bezeichnen wir die einfache, reguläre, auf Bogenlänge parametrisierte Kurve, die den Rand von D in Richtung seiner Orientierung parametrisiert. Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt $\operatorname{Area}(D) := \lambda_2(D)$ des Gebietes D folgende Formel gilt:

$$\operatorname{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt \quad , \text{ wobei } \gamma(t) = (x(t), y(t))$$