Kapitel 9

Einführung in die Analysis auf Untermannigfaltigkeiten

Dozentin: Prof. Dr. Helga Baum

Nach Vorlesungen im Sommersemester 2002 (2. Teil von Analysis IV)
und im Wintesemester 2007/08 (1. Teil von Analysis IIIa)

Letzte Korrekturen und Ergänzungen: 12.04.2008 (Helga Baum)

Im WS 2007/2008 habe ich dieses Gebiet als Teil der Vorlesung Analysis IIIa behandelt. Dabei war durch die Änderung des Studienplanes nur das mehrdimensionale Riemann-Integral, aber noch nicht das Lebesgue-Integral bekannt. An den entsprechenden Stellen in diesem Skript ist also das Lebesgue-Integral durch das Riemann-Inegral zu ersetzen. Die Voraussetzungen muss man dann geeignet modifizieren.

Inhaltsverzeichnis

Bisher haben wir in der Analysis-Ausbildung behandelt, wie man Abbildungen differenziert und integriert, die auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Für viele Bereiche der Mathematik und für viele Anwendungen z.B. in der mathematischen Physik reicht das nicht aus. Als mathematische Modelle treten oft Mengen auf, die nicht *global* durch n reelle Koordinaten zu beschreiben sind, sondern nur *lokal* in der Nähe jedes Punktes. Solche Mengen nennt man lokal Euklidische Räume bzw. Mannigfaltigkeiten, falls noch zusätzliche "gute" Eigenschaften für die Übergänge von einem Koordinatensystem zu einem anderen erfüllt sind. Als Beispiele für solche Objekte kann man sich gekrümmte Flächen, die durch den Graph einer Funktion entstehen oder die Oberfläche eines Rotationskörpers vorstellen.
In dem letzten Kapitel des Grundkurses zur Analysis soll die Differential- und Integralrechnung auf solchen Mannigfaltigkeiten erklärt werden. Das wesentliche Ziel des Kapitels ist der Beweis des Satzes von Stokes für Differentialformen, der einen Zusammenhang zwischen Integralen über einer Menge M und Integralen über den Rand von M herstellt, wie wir ihn in Spezialfällen z.B. bereits aus der Funktionentheorie kennen. Der Satz von Stokes hat vielfältige Anwendungen in der Geometrie, Analysis und mathematischen Physik, die in den Vorlesungen des Hauptstudiums behandelt werden.
Wir betrachten in dieser Vorlesung entsprechend dem Studienplan nur den Fall, dass die Mannigfaltigkeit als Teilmenge eines reellen Raumes $\mathbb{R}^N$ gegeben ist. Man spricht dann von den sogenannten Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$. Diese Einschränkung wäre nicht nötig, hat aber den Vorteil, dass man sich die Konzepte und Objekte zumindest für den Fall von Flächen im $\mathbb{R}^3$ gut anschaulich vorstellen kann. Ich werde hier alle Begriffe so einführen, dass sie bei geeigneter Definition des Tangentialraumes wörtlich auf den Fall von abstrakten Mannigfaltigkeiten zu übertragen sind.

Als Vorbemerkung erinnern wir an einige Begriffe und Bezeichnungen aus der Differentialrechnung von Funktionen mehrerer reeller Variablen (siehe Kapitel 6).

Es sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung von einer offenen Menge des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$. Das Differential $DF_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dieser Abbildung im Punkt $x \in U$ ist eine lineare Abbildung, deren Wert auf einem Vektor $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$ durch die Ableitung von F entlang der Geraden durch x in Richtung $\mathfrak{a}$ gegeben ist

$$DF_x(\mathfrak{a}) = \frac{d}{dt}\Big(F(x + t\mathfrak{a})\Big)\Big|_{t=0} \quad , \quad \mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Wendet man das Differential DF_x auf den i. kanonischen Basisvektor e_i des $\mathbb{R}^n$ an (e_i hat in der i. Komponente eine 1, alle anderen Komponenten sind Null), so erhält man die partielle Ableitung von F nach der i. Koordinate

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = DF_x(e_i).$$

In diesem Kapitel werden wir alle linearen Abbildungen mit den ihnen bezüglich der kanonischen Basen entsprechenden Matrizen identifizieren. Wir identifizieren also das Differential DF_x der Abbildung $F = (F_1, \dots, F_m)$ im Punkt $x \in U$ mit der Jacobi-Matrix von F im Punkt x

$$DF_x \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Existieren alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

der Ordnung k und sind auf U stetig, so nennt man F k-fach stetig differenzierbar oder von der Klasse C^k. Die Menge dieser C^k-Abbildungen wird mit $C^k(U, \mathbb{R}^m)$ bezeichnet. Ist F eine C^k-Abbildung für jedes $k \geq 1$, so nennt man F eine glatte Abbildung oder von der Klasse C^∞.
Eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus der Klasse C^k von U auf V, falls $F : U \longrightarrow V$ bijektiv und F und F^{-1} k-fach stetig differenzierbar sind.
Ist $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $x \in U$, so ist das Differential $DF_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus. Andererseits gilt der Satz über den lokalen Diffeomorphismus: Ist $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung $(1 \leq k \leq \infty)$, $x \in U$ und das Differential $DF_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, so ist F ein lokaler Diffeomorphismus um x, d.h. es existiert eine offene Umgebung $W \subset U$ von x und eine offene Umgebung $\widetilde{W} \subset V$ von $F(x)$, so dass $F|_W : W \longrightarrow \widetilde{W}$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.

9.1 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$

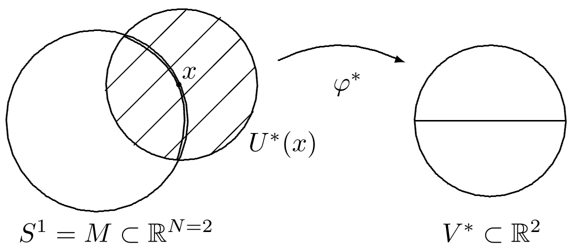
Zuerst definieren die Grundobjekte der Betrachtungen dieses Kapitels, die Untermannigfaltigkeiten.

9.1.1 Untermannigfaltigkeiten ohne Rand

Definition. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt n–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$, falls es um jeden Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $U^* \subset \mathbb{R}^N$ und einen Diffeomorphismus $\varphi^* : U^* \longrightarrow V^*$ von U^* auf eine offene Teilmenge $V^* \subset \mathbb{R}^N$ gibt, so daß*

$$\varphi^*(U^* \cap M) = \{y \in V^* \,|\, y_{n+1} = \ldots = y_N = 0\} = V^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{o\}) \,.$$

gilt.
(o bezeichnet dabei den Nullvektor im Teilraum $\mathbb{R}^{N-n}$.)



Bemerkung: Sind alle Diffeomorphismen φ^* aus der Definition der Untermannigfaltigkeit von der Klasse C^k, $1 \leq k \leq \infty$, so nennt man die Untermannigfaltigkeit "von der Klasse C^k". In dieser Vorlesung beschränken wir uns (in der Regel) auf den Fall, dass die Diffeomorphismen φ^* von der Klasse C^∞ sind und lassen die Angabe der Klasse weg.
Den Diffeomorphismus φ^* kann man sich als "Glattbügeln" des "krummen Teils" $M \cap U^*$ von U^* vorstellen (siehe Bild).
Wir identifizieren im folgenden den Unterraum $\mathbb{R}^n \times \{o\} \subset \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ mit dem

$\mathbb{R}^n$. Alle Teilmengen reeller Räume versehen wir mit der durch die Euklidische Metrik induzierten Topologie. Ist $\varphi^* : U^* \longrightarrow V^*$ ein Diffeomorphismus wie in der der Definition der Untermannigfaltigkeit, so gilt

1. $U := U^* \cap M$ ist eine offene Teilmenge von M bezüglich der auf M induzierten Topologie,

2. $V := V^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{o\}) \subset \mathbb{R}^n$ ist im $\mathbb{R}^n$ offen,

3. $\varphi := \varphi^*|_U : U \longrightarrow V$ ist ein Homöomorphismus zwischen U und V.
   Durch φ werden jedem Punkt der Teilmenge $U \subset M$ eindeutig n reelle Koordinaten zugeordnet.

Definition. *Sei $\varphi^* : U^* \longrightarrow V^*$ ein Diffeomorphismus wie in der Definition der Untermannigfaltigkeit. Dann heißt $(U := U^* \cap M, \varphi := \varphi^*|_U)$ Karte von M um $x \in M$. Eine Überdeckung von M durch Karten, d.h. eine Familie $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, wobei $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ Karten sind und $M = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ gilt, nennt man Atlas von M.*

Satz 9.1 *Seien (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) zwei Karten der Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^N$ um den Punkt $x \in M$. Dann ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Gemäß Definition ist $U_1 = U_1^* \cap M$, $U_2 = U_2^* \cap M$, $\varphi_1 = \varphi_1^*|_{U_1}$ und $\varphi_2 = \varphi_2^*|_{U_2}$, wobei $\varphi_1^* : U_1^* \longrightarrow V_1^*$ und $\varphi_2^* : U_2^* \longrightarrow V_2^*$ Diffeomorphismen zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^N$ sind. Die Abbildung $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ ist die Einschränkung des Diffeomorphismus

$$\varphi_2^* \circ \varphi_1^{*-1} : \varphi_1^*(U_1^* \cap U_2^*) \longrightarrow \varphi_2^*(U_1^* \cap U_2^*)$$

auf den Teilraum $\mathbb{R}^n$ des $\mathbb{R}^N$ und somit ebenfalls ein Diffeomorphismus. □

Die Abbildung $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ heißt *Koordinatentransformation* oder *Kartenübergang* zwischen den Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2).

Offensichtlich ist jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^N$ eine N-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. Als Atlas kann man denjenigen nehmen, der nur aus der durch die Euklidischen Koordinaten gegebenen Karte besteht: $\mathcal{A} = \{(U, \varphi(x) = (x_1, \ldots, x_N)\}$.
Um zu entscheiden, ob eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit ist, muss man einen Atlas für diese Menge angeben. In der Regel wird ein solcher Atlas natürlich aus mehreren Karten bestehen. In vielen Fällen hat man noch andere Möglichkeiten zu überprüfen, ob eine Menge M eine Untermanigfaltigkeit ist. Wir wollen als nächstes ein Kriterium kennenlernen, mit dem man entscheiden kann, ob durch Gleichungen definierte Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ Untermannigfaltigkeiten sind.

Satz 9.2 (Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten durch Gleichungen)
Sei $W \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Teilmenge, $n \leq N$ und $F : W \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ eine glatte Abbildung. Wir bezeichnen mit $M := \{x \in W \mid F(x) = o\}$ die Nullstellenmenge der Abbildung F. Dann gilt:
Ist der Rang der Jacobimatrix DF_x von F in jedem Punkt $x \in M$ maximal, d.h. $N - n$, so ist die Menge $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

Beweis: Als erstes bringen wir die Abbildung F durch eine Koordinatentransformation im $\mathbb{R}^N$ auf eine einfache Gestalt. Wir werden zeigen, dass es um jeden Punkt $y \in M$ eine offene Umgebung $U^* \subset \mathbb{R}^N$ und einen Diffeomorphismus $\varphi^* : U^* \to V^*$ auf eine offene Menge $V^* \subset \mathbb{R}^N$ gibt, so dass

(i) $\varphi^*(y) = 0$ und

(ii) $F\big((\varphi^*)^{-1}(x_1, \ldots, x_N)\big) = (x_{n+1}, \ldots, x_N)$

gilt:
Da der Rang der Jacobimatrix DF_y von F im Punkt y nach Voraussetzung $N - n$ ist, können wir (evt. nach einer Permutation der Koordinaten im $\mathbb{R}^N$) annehmen, dass die letzten $N - n$ Spalten von DF_y linear unabhängig sind. Zur Abkürzung bezeichnen wir diese letzten Spalten mit B_y, d.h.

$$B_y := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}(y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(y) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{N-n}}{\partial x_{n+1}}(y) & \cdots & \frac{\partial F_{N-n}}{\partial x_N}(y) \end{pmatrix}.$$

Sei G die glatte Abbildung

$$\begin{aligned} G : W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n} \\ x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_N) &\mapsto (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n, F_1(x), \ldots, F_{N-n}(x)). \end{aligned}$$

Dann gilt $G(y) = 0$ und die Berechnung der Jacobideterminante ergibt

$$\det(DG_y) = \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ * & B_y \end{pmatrix} = \det B_y.$$

Da die letzten $N - n$ Spalten von DF_x linear unabhängig sind, ist B_y invertierbar, also $\det(DG_y) = \det B_y \neq 0$. Wir können somit den Satz über den lokalen Diffeomorphismus anwenden, der die Existenz einer offenen Umgebung $U^* \subset \mathbb{R}^N$ von y und einer offenen Umgebung $V^* \subset \mathbb{R}^N$ von 0 garantiert, so daß $\varphi^* := G|_{U^*} : U^* \longrightarrow V^*$ ein Diffeomorphismus ist. Dann folgt (i) wegen $\varphi^*(y) = G(y) = 0$. Nach Definition von G gilt

$$\begin{aligned} &G\big((\varphi^*)^{-1}(x)\big) = \\ &= \big((\varphi^*)^{-1}(x)_1 - y_1\ ,\ \ldots\ ,\ (\varphi^*)^{-1}(x)_n - y_n\ ,\ F_1((\varphi^*)^{-1}(x)), \ldots, F_{N-n}((\varphi^*)^{-1}(x))\big). \quad (+) \end{aligned}$$

Es gilt außerdem $G|_{U^*} = \varphi^*$, also $G\big((\varphi^*)^{-1}(x)\big) = x$ für jedes $x \in V^*$. Setzt man dies in (+) ein, so folgt $F\big((\varphi^*)^{-1}(x_1, \ldots, x_N)\big) = (x_{n+1}, \ldots, x_N)$, womit die Behauptung (ii) bewiesen ist.
Wir zeigen nun, dass der Diffeomorphismus $\varphi^* : U^* \to V^*$ eine Karte um $y \in U^*$ definiert. Nach Konstuktion von φ^* folgt

$$\begin{aligned} \varphi^*(U^* \cap M) &= \varphi^*(U^* \cap \{w \in W \mid F(w) = o\}) = \varphi^*(U^*) \cap \{v \in V^* \mid F((\varphi^*)^{-1}(v)) = o\} \\ &= V^* \cap \{v_{n+1} = \ldots = v_N = 0\} = V^* \cap \{\mathbb{R}^n \times \{o\}\}. \end{aligned}$$

Folglich ist $(U, \varphi) := (U^* \cap M, \varphi^*|_{U^* \cap M})$ eine Karte um $y \in M$. $\square$

Beispiele für gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten

Beispiel 1: Die Sphäre.
Wir betrachten die Sphäre vom Radius r im $\mathbb{R}^{n+1}$

$$S_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$$

S_r^n ist eine ist eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Um dies zu zeigen, betrachten wir die glatte Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|^2 - r^2. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $S_r^n = F^{-1}(0)$. Für die Jacobimatrix von F in x gilt
$DF_x = (2x_1, \ldots, 2x_{n+1}) = 2x$. Für $x \in S_r^n$ ist $rg(DF_x) = 1$. Somit ist S_r^n nach Satz 9.2 eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. □

Beispiel 2: Der Graph einer Abbildung.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Wir betrachten den Graphen der Abbildung f

$$M := \text{graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

M läßt sich als Nullstellenmenge der folgenden Abbildung F darstellen:

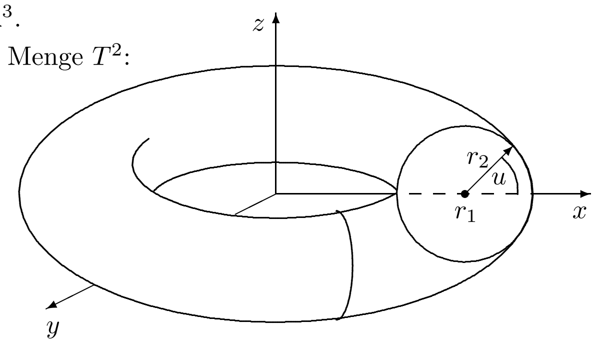
$$\begin{aligned} F : U \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{n+m} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto f(x) - y, \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $M = F^{-1}(o)$ und für die Jacobimatrix gilt

$$DF_{(x,y)} = \left(\begin{array}{c|ccc} & -1 & & \\ \star & & \ddots & \\ & & & -1 \end{array}\right),$$

(mit $n + m$ Spalten und m Zeilen). Da $rg(DF_{(x,y)}) = m$, ist M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+m}$. □

Beispiel 3: Der Rotationstorus.
Wir betrachten den Rotationstorus im $\mathbb{R}^3$.
Dies ist die auf folgende Weise definierte Menge T^2:
Es sei ein Kreis in der (x, z)–Ebene um $(r_1, 0)$ mit Radius r_2 gegeben, wobei $0 < r_2 < r_1$. Sei T^2 die Punktmenge im $\mathbb{R}^3$, die bei Drehung dieses Kreises um die z–Achse entsteht.
T^2 heißt *Rotationstorus.*
Wir zeigen daß



$$T^2 = \left\{ \big((r_1 + r_2 \cos u) \cos v,\ (r_1 + r_2 \cos u) \sin v,\ r_2 \sin u\big) \ \middle|\ u, v \in \mathbb{R} \right\} :$$

Der Kreis in der (x, z)–Ebene wird durch $\gamma(u) := (r_1 + r_2 \cos u, r_2 \sin u)$ parametrisiert. Bei Drehung um die z-Achse bleibt die z-Koordinate unverändert. Vom Nullpunkt verschiedene Punkte in der (x, y)–Ebene werden durch Polarkoordinaten in der Form

$pe^{iv} = p(\cos v + i\sin v) = (p\cos v, p\sin v)$ beschrieben, wobei $p \in \mathbb{R}^+$ den Abstand vom Nullpunkt und v den Winkel zur x-Achse beschreibt. Folglich gilt für die Koordinaten eines Punktes des Rotationstorus'

$$x = (r_1 + r_2\cos u)\cos v, \quad y = (r_1 + r_2\cos u)\sin v, \quad \text{bzw.} \ \ z = r_2 \sin u. \quad (*)$$

Wir zeigen nun, daß T^2 eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Aus $(*)$ folgt $x^2 + y^2 = (r_1 + r_2\cos u)^2$, also

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - r_1\right)^2 = r_2^2\cos^2 u = r_2^2(1-\sin^2 u) = r_2^2 - z^2.$$

Somit gilt

$$T^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - r_1)^2 + z^2 - r_2^2 = 0\}.$$

Sei nun die Abbildung F definiert durch

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto (\sqrt{x^2+y^2} - r_1)^2 + z^2 - r_2^2, \end{aligned}$$

dann gilt $T^2 = F^{-1}(0)$. Außerdem ist

$$DF_{(x,y,z)} = \left(\frac{2(\sqrt{x^2+y^2} - r_1)\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2(\sqrt{x^2+y^2} - r_1)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z\right)$$

und es gilt $DF_{(x,y,z)} \neq (0,0,0)$ für alle $(x,y,z) \in T^2$. Nach Satz 9.2 ist T^2 eine 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. □

Wir haben den 2-dimensionalen Rotationstorus T^2 im Beispiel 3 durch zwei Parameter u und v beschrieben. Wir betrachten nun Mengen im $\mathbb{R}^N$, die durch n Parameter beschrieben sind und untersuchen, unter welchen Bedingungen an die Parametrisierung solche Mengen Untermannigfaltigkeiten sind. Dies gibt uns ein weiteres Kriterium um zu entscheiden, ob gewisse Mengen Untermannigfaltigkeiten sind.

Definition. *Sei M eine Teilmenge des $\mathbb{R}^N$. Eine lokale Parametrisierung von M um den Punkt $x \in M$ durch n Parameter ist eine glatte injektive Abbildung $\Phi : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ von einer offenen Teilmenge W des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^N$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$x \in \Phi(W) \subset M$.*
2. *$\Phi(W)$ ist offen in M bzgl. der auf M induzierten Topologie. d.h. es gilt $\Phi(W) = U^* \cap M$, mit $U^* \subset \mathbb{R}^N$ offen,*
3. *$\Phi : W \longrightarrow \Phi(W)$ ist ein Homöomorphismus,*
4. *Die Jacobimatrix $D\Phi_w$ hat den Rang n für alle $w \in W$.*

Beispiele:

1. Ist $h : U \longrightarrow V$ eine Karte einer Untermannigfaltigkeit M um $x \in M$, so ist

$$\Phi := h^{-1} : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^N$$

eine lokale Parametrisierung von M um x.

2. Sei $W = (u_0 - \pi, u_0 + \pi) \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi) \subset \mathbb{R}^2$ und $\Phi : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$\Phi(u,v) := ((r_1 + r_2 \cos u)\cos v, (r_1 + r_2 \cos u)\sin v, r_2 \sin u)\ ,\ (u,v) \in W.$$

Dann ist Φ eine lokale Parametrisierung von T^2 um den Punkt $\Phi(u_0, v_0)$.

Satz 9.3 Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten durch lokale Parametrisierungen
Sei $M \subset \mathbb{R}^N$. Um jeden Punkt $x \in M$ existiere eine lokale Parametrisierung von M durch n Parameter. Dann ist M eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

Beweis: Sei $x \in M$ und sei die Abbildung $\Phi : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine lokale Parametrisierung um x. Unser Ziel ist es, aus Φ eine Karte um x zu konstruieren. Für den Rang der Jacobimatrix von Φ gilt $rg D\Phi_w = n$ für jeden Punkt $w \in W$. OBdA können wir annehmen, daß die ersten n Zeilen dieser Matrix linear unabhängig sind. (Dies erreicht man durch Umordnen der Koordinaten und evt. durch verkleinern von W). Es gilt also

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(w) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(w) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(w) & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(w) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (*)$$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} G : W \times \mathbb{R}^{N-n} \subset \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (a,b) &\mapsto \Phi(a) + (o,b) = (\Phi_1(a), \ldots, \Phi_n(a), b_1, \ldots b_{N-n}). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\det DG_{(a,b)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(a) & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(a) & \\ & \star & & I_{N-n} \end{pmatrix}.$$

Mit $(*)$ folgt daher $\det DG_{(a,b)} \neq 0$ für jedes $(a,b) \in W \times \mathbb{R}^{N-n}$. Sei nun $w_0 \in W$ das Urbild von x: $\Phi(w_0) = x$. Dann ist $G(w_0, o) = x$. Nach dem Satz über lokale Diffeomorphismen existiert eine offene Umgebung $V_1 \subset \mathbb{R}^N$ von (w_0, o) und eine offene Umgebung $V_2 \subset \mathbb{R}^N$ von x, so daß $G|_{V_1} : V_1 \longrightarrow V_2$ ein Diffeomorphismus ist. Nach Definition der Parametrisierung ist die Abbildung $\Phi^{-1} : \Phi(W) \longrightarrow W$ stetig und bijektiv. Folglich sind Bilder offener Mengen unter $\Phi : W \longrightarrow \Phi(W)$ offen. Also muß die Menge $\{\Phi(a) \,|\, (a,o) \in V_1\} = \Phi(V_1 \cap (W \times \{o\}))$ offen in $\Phi(W)$ bezüglich der durch $\mathbb{R}^N$ induzierten Topologie sein. Dies bedeutet, daß eine offene Menge $O \subset \mathbb{R}^N$ mit $\{\Phi(a) \,|\, (a,o) \in V_1\} = O \cap \Phi(W)$ existiert. Wir setzen nun $V_2^* := V_2 \cap O$ und $V_1^* := G^{-1}(V_2^*)$ und bezeichnen die Restriktion $G^{-1}|_{V_2^*} : V_2^* \longrightarrow V_1^*$ mit φ^*. Wir behaupten, daß φ^* eine Karte der Untermannigfaltigkeit um $x \in M$ definiert. φ^* ist natürlich ein Diffeomorphismus und es gilt

$$V_2^* \cap M = M \cap V_2 \cap O = \{\Phi(a) \,|\, (a,o) \in V_1^*\} = \{G(a,o) \,|\, (a,o) \in V_1^*\} = G(V_1^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{o\})),$$

aufgrund der Definition von G. Also folgt $\varphi^*(V_2^* \cap M) = V_1^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{o\})$. $\square$

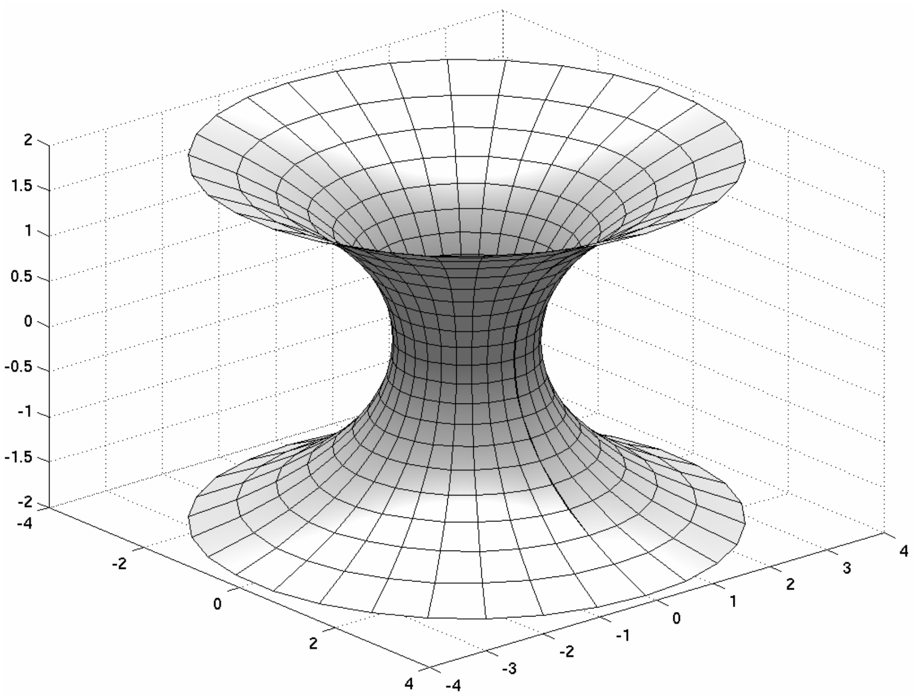
Beispiel: Das Katenoid
Das Katenoid ist die Fläche, die entsteht, wenn man die Kettenlinie (siehe Kapitel 8) um die z-Achse dreht. Sie wird beschrieben durch

$$M^2 := \{ \Phi(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \mid (u,v) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Das Katenoid M^2 ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, denn

$$\Phi : (u,v) \in (u_0 - \pi, u_0 + \pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \Phi(u,v) \in M$$

ist eine lokale Parametrisierung um den Punkt $\Phi(u_0, v_0) \in M$ für jedes $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ (Übungsaufgabe 9.3).



Beispiel: Die Wendelfläche
Die Wendelfläche ist die folgende Punktmenge

$$F^2 = \{\Phi(u,v) := (v \cos u, v \sin u, u) \mid v, u \in \mathbb{R}, v > 0 \}$$

Die Wendelfläche F^2 ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, denn

$$\Phi : (u,v) \in (u_0 - \pi, u_0 + \pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \Phi(u,v) \in F$$

ist eine lokale Parametrisierung um den Punkt $\Phi(u_0, v_0) \in F$ für jedes $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.

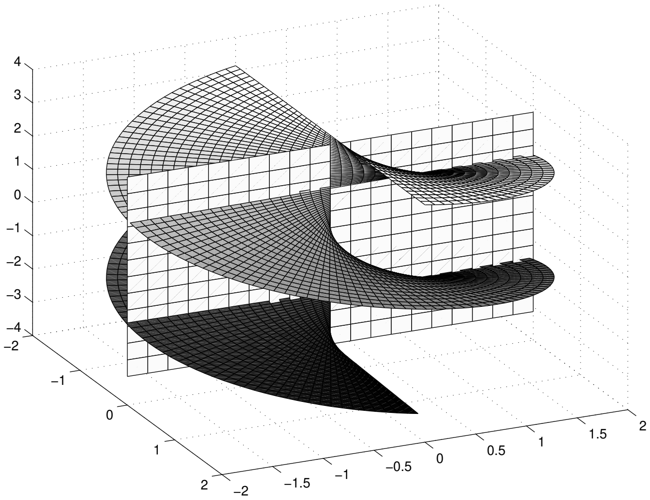


Abbildung 9.1: Wendelfläche geschnitten mit einer Ebene durch die z-Achse

In den Übungsaufgaben und den Übungen werden weitere Beispiele für Teilmengen behandelt, die Untermannigfaltigkeiten bzw. keine Untermannigfaltigkeiten sind (siehe auch die Übungsaufgaben 9.1 - 9.5. in Abschnitt 9.14).

9.1.2 Untermannigfaltigkeiten mit Rand

Bisher haben wir Untermannigfaltigkeiten behandelt, die anschaulich gesprochen, keinen "Rand" haben. Solch einfache Mengen, wie z.B. die Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$, wurden durch die bisherige Definition nicht erfaßt. Wir erweitern nun den Begriff der Untermannigfaltigkeit und lassen auch Untermannigfaltigkeiten mit Rand, z.B. die Kreisscheibe, zu.

Definition. $\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n \geq 0\}$ *heißt Halbraum.*
$\partial\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n_+ \,|\, x_n = 0\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ *ist der Rand des Halbraumes.*

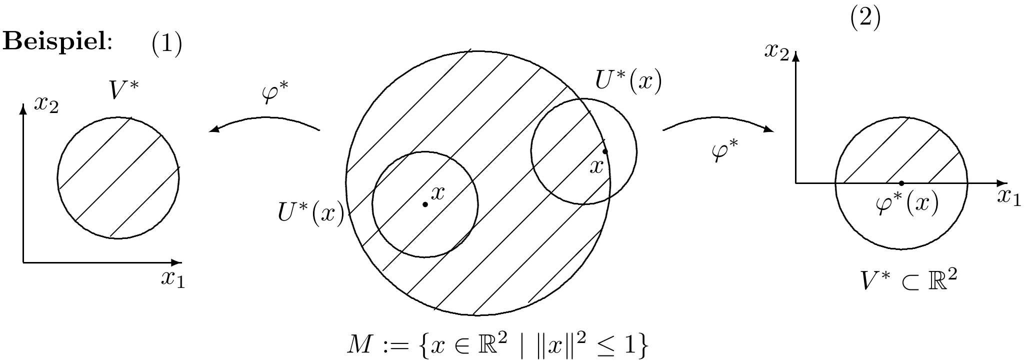
Definition.* *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt n–dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand, falls es um jeden Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $U^* \subset \mathbb{R}^N$ und einen Diffeomorphismus $\varphi^* : U^* \longrightarrow V^*$ von U^* auf eine offene Menge $V^* \subset \mathbb{R}^N$ gibt, so daß eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist*

1. $\varphi^*(U^* \cap M) = V^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, *oder*
2. $\varphi^*(U^* \cap M) = V^* \cap (\mathbb{R}^n_+ \times \{0\})$ *und für die n. Koordinate von $\varphi^*(x)$ gilt $\varphi^*_n(x) = 0$.*

Auch in diesem Fall heißt das Paar $(U := U^* \cap M, \varphi := \varphi^*|_{U^*})$ Karte um $x \in M$.

Wir veranschaulichen die beiden Fälle am Beispiel der Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ (dabei ist $N = n = 2$).

Beispiel:



Im "Inneren" der Kreisscheibe gibt es eine Karte vom Typ (1), für den "Rand" eine Karte vom Typ (2). Wir zeigen nun, dass ein Punkt x einer Untermannigfaltigkeit entweder Karten vom Typ (1) oder Karten vom Typ (2) hat.

Satz 9.4 *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und $x \in M^n$. Dann erfüllen die Diffeomorphismen $\varphi^* : U^* \longrightarrow V^*$, die eine Karte um x definieren, entweder alle die Bedingung 1. oder alle die Bedingung 2. aus der vorstehenden Definition*.*

Beweis: Wir schließen indirekt und nehmen dazu an, daß ein Diffeomorphismus $\varphi_1^* : U_1^* \longrightarrow V_1^*$ mit $x \in U_1^*$ und $\varphi_1^*(U_1^* \cap M) = V_1^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ und ein Diffeomorphismus $\varphi_2^* : U_2^* \longrightarrow V_2^*$ mit $x \in U_2^*$, $\varphi_2^*(U_2^* \cap M) = V_2^* \cap (\mathbb{R}_+^n \times \{0\})$ und $(\varphi_2)_n^*(x) = 0$ existiert. Wir setzen $O := U_2^* \cap U_1^*$. Dann ist $\varphi_1^*(O \cap M) \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\varphi_2^* \circ (\varphi_1^*)^{-1} : \varphi_1^*(O \cap M) \longrightarrow \varphi_2^*(O \cap M) \subset \mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}^n$$

ist ein Diffeomorphismus, der $\varphi_2^* \circ (\varphi_1^*)^{-1}(\varphi_1^*(x)) = \varphi_2^*(x)$ erfüllt. Insbesondere ist die Menge $\varphi_2^*(O \cap M)$ offen im $\mathbb{R}^n$. Es gilt aber $\varphi_2^*(O \cap M) \subset \mathbb{R}_+^n$ und $\varphi_2^*(x) \in \partial\mathbb{R}_+^n$, also kann $\varphi_2^*(O \cap M)$ nicht offen im $\mathbb{R}^n$ sein. Dies ist ein Widerspruch. □

Satz 9.4 erlaubt die folgende Definition:

Definition. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit. Die Menge*

$$\partial M := \{x \in M \mid \exists \text{ Karte um } x, \text{ die Bedingung 2. aus Definition}^* \text{ erfüllt}\}$$

heißt Rand von M. Die Menge

$$Int(M) := \{x \in M \mid \exists \text{ Karte um } x, \text{ die Bedingung 1. aus Definition}^* \text{ erfüllt}\}$$

heißt Inneres von M.
Die Untermannigfaltigkeit M ist die disjunkte Vereinigung des Inneren und des Randes: $M = Int(M) \cup \partial M$.

Satz 9.5 *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist $Int(M)$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand und ∂M entweder leer oder eine $(n-1)$–dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand.*

Beweis: Nach Definition ist $Int(M)$ eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Sei $\partial M \neq \emptyset$ und $x \in \partial M$. Dann existiert ein Diffeomorphismus $\varphi^* : U^* \longrightarrow V^*$ mit $x \in U^*$ und $\varphi^*(U^* \cap M) = V^* \cap (\mathbb{R}_+^n \times \{0\})$. Ist dann $y \in U^* \cap \partial M$, so folgt $\varphi_n^*(y) = 0$. Ist nämlich $\varphi_n^*(y) > 0$, würde man durch Einschränkung des Diffeomorphismus φ^* eine Karte vom Typ (1) um y erhalten, was dem Satz 9.4 widerspricht. Somit erhalten wir

$$\varphi^*(U^* \cap \partial M) = V^* \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{o\}).$$

Ist $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ die von φ^* definierte Karte um $y \in M \cap \partial M \subset M$, so ist $(U \cap \partial M, \varphi = (x_1, \ldots, x_{n-1}))$ eine Karte um y in der Teilmenge ∂M. □

9.2 Tangential- und Normalenräume an Untermannigfaltigkeiten

Für eine differenzierbare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist das Differential im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung $DF_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Den Wert der Abbildung DF_x angewendet auf einen Vektor $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$ erhält man durch die Richtungsableitung von F in Richtung $\mathfrak{a}$, d.h. durch die Ableitung von F entlang der Geraden durch x in Richtung $\mathfrak{a}$

$$DF_x(\mathfrak{a}) = \frac{d}{dt}\big(F(x + t\mathfrak{a})\big)_{|t=0}$$

Den Vektorraum $\mathbb{R}^n$, auf dem das Differential DF_x definiert ist, kann man als die Menge der Tangentialvektoren an alle Geraden $\gamma(t) = x + t\mathfrak{a}$ durch x in $t = 0$ betrachten.
Wir wollen dies in den folgenden beiden Abschnitten auf differenzierbare Abbildungen $F : M \longrightarrow N$ zwischen Untermannigfaltigkeiten verallgemeinern. Dazu definieren und untersuchen wir in diesen Abschnitt zunächst diejenigen Vektorräume, zwischen denen das Differential von F abbilden soll, die sogenannten Tangentialräume. Die Rolle der Geraden durch x übernehmen jetzt im Falle von Untermannigfaltigkeiten diejenigen glatten Kurven $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ durch x, deren Bild auf der Untermannigfaltigkeit M liegt.

Im folgenden sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit mit oder ohne Rand.

Definition. *Sei $x \in M$. Die Menge der Vektoren*

$$T_xM := \left\{ v \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists \text{ glatte Kurve } \gamma : I \longrightarrow M \text{ mit } \gamma(0) = x\,,\ \gamma'(0) = v, \\ \text{wobei } I = (-\varepsilon, \varepsilon), [0, \varepsilon) \text{ oder } (-\varepsilon, 0] \end{array} \right\}$$

heißt Tangentialraum von M im Punkt x. Die Elemente von T_xM heißen Tangentialvektoren an M im Punkt x.

Satz 9.6 *Der Tangentialraum T_xM einer n–dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^N$ im Punkt $x \in M$ ist ein n–dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^N$.*

Beweis: Sei $\varphi^* : U^* \longrightarrow V^*$ ein eine Karte um $x \in M$ definierender Diffeomorphismus. Dann ist gemäß Definition $\varphi^*(U^* \cap M) = V^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{o\})$, falls $x \in \mathrm{Int}(M)$ oder $\varphi^*(U^* \cap M) = V^* \cap (\mathbb{R}^n_+ \times \{o\})$ und $\varphi^*_n(x) = 0$, falls $x \in \partial M$. Da φ^* ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ ist, ist das Differential $D\varphi^*_x : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ein Isomorphismus. Wir werden zeigen, daß

$$(D\varphi^*_x)^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{o\}) = T_xM. \qquad (*)$$

gilt. Weil lineare Isomorphismen n–dimensionale Vektorräume wieder auf ebensolche abbilden, folgt aus dieser Behauptung dann der Satz 9.6.
Sei zunächst $w \in \mathbb{R}^n \times \{o\}$. Die n. Koordinate des Vektors w sei mit w_n bezeichnet. Wir betrachten die glatte Kurve $\gamma : I \longrightarrow U^*$

$$\gamma(t) := (\varphi^*)^{-1}(\varphi^*(x) + tw),$$

wobei $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ falls $x \in \mathrm{Int}(M)$, $I = [0, \varepsilon)$ falls $x \in \partial M$ und $w_n > 0$, und $I = (-\varepsilon, 0]$ falls $x \in \partial M$ und $w_n < 0$. Dabei wird ε so klein gewählt, daß $\varphi^*(x) + tw \in V^*$ für alle $t \in I$. Also folgt $\varphi^*(x) + tw \in V^* \cap (\mathbb{R}^n \times \{o\})$ und daher

$$\gamma(t) = (\varphi^*)^{-1}(\varphi^*(x) + tw) \subset U^* \cap M \subset M.$$

Außerdem erhalten wir $\gamma(0) = x$ und mit der Kettenregel für differenzierbare Abbildungen zwischen reellen Räumen

$$\gamma'(0) = \left(D\varphi^{*-1}\right)_{\varphi^*(x)}(w) = (D\varphi^*_x)^{-1}(w).$$

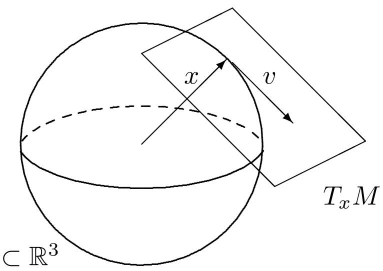
Gemäß der Definition von T_xM ist also $(D\varphi^*_x)^{-1}(w) \in T_xM$.
Sei nun $v \in T_xM$. Dann existiert eine glatte Kurve $\gamma : I \longrightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$. Wählen wir das Intervall I klein genug, so ist $\gamma(t) \in U^*$ für alle $t \in I$. Also folgt $\varphi^*(\gamma(t)) \subset \mathbb{R}^n \times \{o\}$. Ableiten in $t = 0$ und Anwenden der Kettenregel ergibt $D\varphi^*_x(\gamma'(0)) \in \mathbb{R}^n \times \{o\}$. Wegen $v = \gamma'(0)$ folgt also auch die umgekehrte Inklusion von (*). □

Beispiel 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $x \in U$. Dann gilt $T_xU = \mathbb{R}^n$.

Beispiel 2: Sei $S^n_r := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$ die n-dimensionale Sphäre und $x \in S^n_r$. Dann gilt

$$T_xS^n_r = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v\rangle = 0\}.$$

Ist nämlich $v \in T_xS^n_r$, so existiert eine glatte Kurve $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$ und $\langle \gamma(t), \gamma(t)\rangle \equiv r^2$ für alle $t \in I$.
Durch Ableiten der letzten Gleichung nach t erhalten wir $\langle \gamma'(t), \gamma(t)\rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle = 0$. Für $t = 0$ ergibt sich $\langle v, x\rangle = 0$. Folglich gilt $T_xS^n_r \subset \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v\rangle = 0\}$. Da beide Vektorräume die gleiche Dimension haben folgt die Behauptung.



$M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$

Beispiel 3: Sei $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ eine C^∞–Abbildung und $M := F^{-1}(o)$ die Nullstellenmenge von F. Die Jacobimatrix DF_x habe maximalen Rang $N - n$ für alle $x \in M$. Dann ist M eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit und es gilt

$$\begin{aligned} T_xM &= \Big(\mathrm{span}\,(\mathrm{grad}\, F_1(x), \ldots, \mathrm{grad}\, F_{N-n}(x))\Big)^\perp \\ &= \{v \in \mathbb{R}^N \mid \langle v, \mathrm{grad}\, F_i(x)\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, N-n\}. \end{aligned}$$

Da die beiden in der Behauptung auftretenden Unterräume des $\mathbb{R}^N$ die gleiche Dimension haben, genügt es zu zeigen, daß $T_xM \subset \big(\mathrm{span}\,(\mathrm{grad}\, F_1(x), \ldots, \mathrm{grad}\, F_{N-n}(x))\big)^\perp$. Sei also $v \in T_xM$. Dann existiert eine Kurve $\gamma : I \longrightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$, so daß $F_i(\gamma(t)) \equiv 0$ für alle $t \in I$ und $i = 1, \ldots, N - n$. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$(DF_i)_x(v) = \langle \mathrm{grad}\, F_i(x), v\rangle = 0,$$

für alle $i = 1, \ldots, N - n$. Daraus folgt die Behauptung.

Beispiel 4: Sei $M^n \subset \mathbb{R}^n$ eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\Phi : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine lokale Parametrisierung um $x = \Phi(u) \in M$. Dann gilt

$$T_xM = \mathrm{span}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(u), \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(u)\right).$$

Da nach Definition die Jacobimatrix $D\Phi_u = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(u), \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(u)\right)$ den Rang n hat, ist $\mathrm{span}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(u), \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(u)\right)$ ein n–dimensionaler Unterraum. Es genügt also zu zeigen, daß $\mathrm{span}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(u), \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(u)\right) \subset T_xM$ gilt. Wir betrachten dazu die glatte Kurve $\gamma(t) := \Phi(u + te_i)$. Dann ist $\gamma(0) = x$ und aus der Kettenregel folgt $\gamma'(0) = D\Phi_u(e_i) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(u)$. Es folgt $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(u) \in T_xM$ und somit die Behauptung.

Definition. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $x \in M$. Der zum Tangentialraum T_xM orthogonale Vektorraum*

$$N_xM := \{w \in \mathbb{R}^N \mid w \perp T_xM\} = (T_xM)^\perp$$

heißt Normalenraum an M im Punkt $x \in M$. Die Elemente von N_xM heißen Normalenvektoren an M im Punkt x. Die n-dimensionale Ebene

$$Tan_xM := x + T_xM \subset \mathbb{R}^N$$

heißt Tangentialebene an M in $x \in M$ und die $N-n$-dimensionsale Ebene

$$Nor_xM := x + N_xM \subset \mathbb{R}^N$$

heißt Normalenebene an M in $x \in M$.

Aus den Bespielen 3 und 4 erhält man folgende Möglichkeiten, die Normalenräume zu berechnen:

1. Ist $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $\Phi : W \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine lokale Parametrisierung um $x = \Phi(u) \in M$, dann ist
$$N_xM = \mathbb{R}\Big(\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(u) \times \ldots \times \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(u)}_{\text{Vektorprodukt}}\Big).$$
2. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine gleichungsdefinierte Hyperfläche, d.h. $M = F^{-1}(0)$ für eine glatte Abbildung $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit nichtverschwindendem Gradienten. Dann ist $N_xM = \mathbb{R} \cdot \mathrm{grad}\, F(x)$.

Ein konkretes Beispiel:
Sei $M^2 = S^2$ die 2-dimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T_{(0,0,1)}S^2 &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ N_{(0,0,1)}S^2 &= \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Weitere Beispiele findet man in den Übungsaufgaben 9.5. - 9.7.

9.3 Differenzierbare Abbildungen und ihr Differential

Wir definieren nun den Begriff der differenzierbaren Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten.

Definition. *Seien* $M_1^{n_1} \subset \mathbb{R}^{N_1}$ *und* $M_2^{n_2} \subset \mathbb{R}^{N_2}$ *zwei Untermannigfaltigkeiten. Eine Abbildung* $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *heißt differenzierbar von der Klasse* C^k, $1 \leq k \leq \infty$, *falls für jede Karte* (U, φ) *von* M_1 *die Abbildung*

$$F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n_1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N_2}$$

eine C^k*-Abbildung ist.*
Mit $C^k(M)$ *bezeichnen wir den Ring aller reellwertigen* C^k*-Abbildungen auf* M. *Mit* $C^k(M_1, M_2)$ *bezeichnen wir den Vektorraum aller* C^k*-Abbildungen zwischen den Untermannigfaltigkeiten* M_1 *und* M_2.

Bemerkungen:
(1) In der Regel werden wir uns auf glatte, d.h. C^∞-Abbildungen beschränken. Wenn der Grad der Differenzierbarkeit nicht interessiert, so sagen wir auch kurz differenzierbare Abbildung (und lassen der Kürze halber die Angabe C^k weg).
(2) Es genügt, die Differenzierbarkeit der Abbildungen $F \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}^{N_2}$ für einen Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ zu überprüfen (Übungsaufgabe).
(3) Ist $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ eine offene Teilmenge, dann stimmt der eben definierte Differenzierbarkeitsbegriff mit dem schon bekannten für Abbildungen zwischen reellen Vektorräumen überein .
(4) Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit der Klasse C^k und (U, φ) eine Karte auf M. Dann ist die Kartenabbildung $\varphi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar von der Klasse C^k (Übungsaufgabe).
(5) Seien $F : M_1 \longrightarrow M_2$ und $G : M_2 \longrightarrow M_3$ differenzierbar, dann ist $G \circ F : M_1 \longrightarrow M_3$ differenzierbar (Übungsaufgabe).

Definition. *Ist* $F : M_1^{n_1} \longrightarrow M_2^{n_2}$ *eine Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten. Sei* (U, φ) *eine Karte um* $x \in M_1$ *und* (V, ψ) *eine Karte um* $F(x) \in M_2$. *Dann heißt die Abbildung*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^{n_1} \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^{n_2}$$

Kartendarstellung von F *bzgl. der Karten* (U, φ) *und* (V, ψ).
Ist speziell $F : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}^N$, *so heißt* $F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *Kartendarstellung von* F *bzgl. der Karte* (U, φ).

Die Abbildung F ist differenzierbar von der KLasse C^k, wenn alle ihre Kartendarstellungen C^k-Abbildungen sind.

Das Differential einer differenzierbaren Abbildung $F : M_1 \longrightarrow M_2$ definiert man nun in Analogie zu den Abbildungen zwischen reellen Räumen als Ableitung von F entlang von Kurven:

Definition. *Sei* $F : M_1 \longrightarrow M_2$ *eine differenzierbare Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten. Unter dem Differential der Abbildung* F *im Punkt* $x \in M_1$ *versteht man die Abbildung*

$$\begin{aligned} dF_x : T_x M_1 &\longrightarrow T_{F(x)} M_2 \\ \gamma'(0) &\longmapsto (F\gamma)'(0), \end{aligned}$$

wobei $\gamma : I \longrightarrow M_1$ *eine glatte Kurve mit* $\gamma(0) = x$ *ist.*

Bemerkung 1: Die Definition von dF_x ist korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl von γ: Sei $v \in T_xM$ und sei γ eine beliebige glatte Kurve auf M_1 mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$. Wir wählen eine Karte (U, φ) um x. Dann folgt aus der Kettenregel für differenzierbare Abbildungen zwischen reellen Räumen, dass

$$(F\gamma)'(0) = D(F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}((\varphi\gamma)'(0)).$$

Da die Kartenabbildung φ nach Definition durch Einschränkung eines lokalen Diffeomorphismus φ^* im Einbettungsraum $\mathbb{R}^N$ entsteht, folgt aus der Kettenregel weiterhin $(\varphi\gamma)'(0) = (\varphi^*\gamma)'(0) = D\varphi^*_x(\gamma'(0)) = D\varphi^*_x(v)$ und somit

$$(F\gamma)'(0) = D(F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ D\varphi^*_x(v).$$

$(F\gamma)'(0)$ hängt also nicht von der Wahl der Kurve γ ab.

Bemerkung 2: Sind $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ und $M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ offene Teilmengen der rellen Räume, dann stimmt das soeben definierte Differential mit dem in Kapitel 6 definierten Differential überein:

$$dF_x(v) = \frac{d}{dt} F(\underbrace{x + tv}_{\gamma(t)})|_{t=0} = DF_x(v).$$

Satz 9.7 *Seien $F : M_1 \longrightarrow M_2$ und $G : M_2 \longrightarrow M_3$ differenzierbar und $x \in M_1$.*

1. *Das Differential $dF_x : T_xM_1 \longrightarrow T_{F(x)}M_2$ ist eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen.*

2. *Es gilt die Kettenregel: $d(G \circ F)_x = dG_{F(x)} \circ dF_x$.*

Beweis: Sei $v \in T_xM_1$ und $\gamma : I \longrightarrow M_1$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$.
Zu 1. Sei (U, φ) eine Karte um x. Nach der Definition des Differentials von F und der Kettenregel für Abbildungen zwischen reellen Räumen folgt dann wie oben

$$dF_x(v) = (F \circ \gamma)'(0) = [(F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)]'(0) = D(F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ D\varphi^*_x(v),$$

Da die Differentiale differenzierbarer Abbildungen im $\mathbb{R}^N$ linear sind, ist dF_x als Komposition linearer Abbildungen wieder linear.
Zu 2. Anwenden der Definition ergibt

$$\begin{aligned}(dG)_{F(x)} \circ (dF)_x(v) &= (dG)_{F(x)}((F \circ \gamma)'(0)) = (G \circ (F \circ \gamma))'(0) = ((G \circ F) \circ \gamma)'(0) \\ &= d(G \circ F)_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = d(G \circ F)_x(v).\end{aligned}$$

□

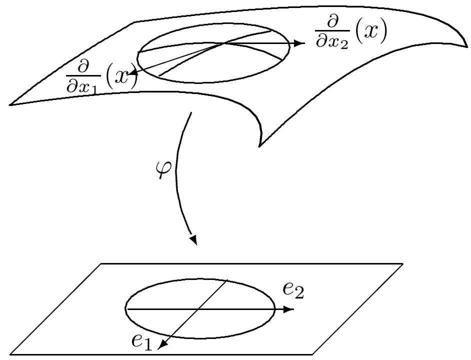
Bemerkung: Die folgende Bemerkung erleichtert oft den Nachweis, dass eine auf einer Untermannigfaltigkeit definierte Abbildung differenzierbar ist und gibt gleichzeitig einen Weg an, ihr Differential zu berechnen:
Sei $F : U \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung, U offen und $M^n \subset U \subset \mathbb{R}^N$ eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist die Abbildung $f := F|_M : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ebenfalls differenzierbar und es gilt $df_x = DF_x|_{T_xM}$ (Übungsaufgabe).

9.4 Kanonische Basen und Kobasen

Wie man aus der Algebra weiß, ist es oft nützlich, spezielle Basen in Vektorräumen zu betrachten. Als Basis eines Tangentialraumes T_xM benutzt man häufig die durch eine Karte um x definierte sogenannte kanonische Basis, die jetzt definiert werden soll.

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltgkeit und $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine Karte um $x \in M$. Es bezeichne e_i den i. kanonischen Basisvektor im $\mathbb{R}^n$ (die i. Komponente von e_i ist 1, alle anderen Komponenten von e_i sind Null). Wir betrachten den Tangentialvektor im Punkt $x \in M$, der durch die Ableitung der i. Koordinatenlinie $\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_i)$ durch x in $t = 0$ definiert wird:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) := \frac{d}{dt}\Big(\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_i)\Big)\Big|_{t=0} = (D\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \in T_xM$$



Da für den Tangentialraum $T_xM = d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$ gilt und die Abbildung $d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}$ ein Isomorphismus ist, bilden die n Vektoren

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)\right)$$

eine Basis im Tangentialraum T_xM. Diese Basis nennt man *kanonische Basis in T_xM bezüglich der Karte (U, φ)*.

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}^2$. Wir bestimmen die kanonischen Basen der durch die Euklidischen und durch die Polarkoordinaten definierten Karten:

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die durch die Euklidischen Koordinaten gegebene Karte $\varphi(x) := (x_1, x_2)$. Für diese Karte gilt offensichtlich

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = e_i \quad \text{für jeden Punkt } x = (x_1, x_2) \in M.$$

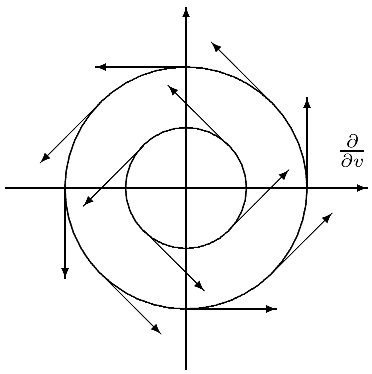
Die Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$ sind gegeben durch die Parametrisierung

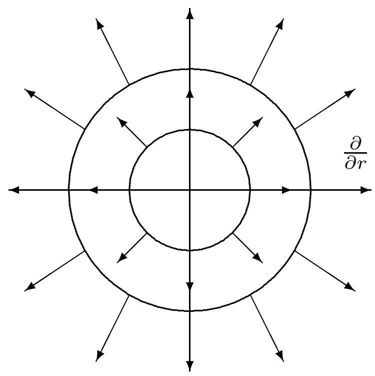
$\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \longrightarrow U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$

$$\Phi(r, v) := (r \cos v, r \sin v).$$

Im Punkt $x = (x_1, x_2) = \Phi(r, v)$ gilt dann für die durch die Parametrisierung Φ definierte Karte (U, Φ^{-1})

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(x) &= \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, v) = (\cos v, \sin v) = \frac{1}{r}x \qquad \text{und} \\ \frac{\partial}{\partial v}(x) &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}(r, v) = (-r \sin v, r \cos v) = (-x_2, x_1). \end{aligned}$$





Wir beschreiben nun die Beziehung zwischen den kanonischen Basen zu zwei verschiedenen Karten um einen Punkt einer Untermannigfaltigkeit.

Satz 9.8 (Transformationsformel für kanonische Basen) *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $x \in M$. $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ und $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ seien zwei Karten um x. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_\alpha}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial y_\alpha}(x),$$

wobei $\frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_\alpha}{\partial x_i}(\varphi(x))$ die α–te Komponente des Vektors der i–ten partiellen Ableitung $\frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x))$ ist.
Die Übergangsmatrix zwischen den kanonischen Basen von (U, φ) und (V, ψ) ist also die Jacobimatrix des Kartenüberganges $\psi \circ \varphi^{-1}$.

Beweis: Bezeichne $(e_1, \ldots, e_N)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^N$. Die i–te Spalte der Jacobimatrix $D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ ist gegeben durch $d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_\alpha}{\partial x_i} \cdot e_\alpha$. Dann folgt per Definition, Kettenregel und Linearität des Differentials

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(x) &= (d\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) = d(\psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) \\
&= (d\psi^{-1})_{\psi(x)} \circ d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) \\
&= (d\psi^{-1})_{\psi(x)}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_\alpha}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot e_\alpha \Big) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_\alpha}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot (d\psi^{-1})_{\psi(x)}(e_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_\alpha}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial y_\alpha}(x).
\end{aligned}$$

□

Auf analoge Weise erhält man die Basisdarstellung des Differentials einer differenzierbaren Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten bezüglich kanonischer Basen:

Satz 9.9 (Basisdarstellung des Differentials einer differenzierbaren Abbildung) *Sei $F : M_1 \longrightarrow M_2$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten und $x \in M_1$. Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine Karte um $x \in M_1$ und $(W, \psi = (z_1, \ldots, z_k))$ eine Karte um $F(x) \in M_2$. Dann gilt für die lineare Abbildung $dF_x : T_x M_1 \longrightarrow T_{F(x)} M_2$*

$$dF_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\Big) = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_\alpha}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial z_\alpha}(F(x)).$$

Die Matrix von dF_x bezüglich der kanonischen Basen der Karte (U,φ) um $x \in M_1$ und (W,ψ) um $F(x) \in M_2$ ist also die Jacobimatrix der Kartendarstellung $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ von F in $\varphi(x)$.

Beweis: Der Beweis erfolgt wie in Satz 9.8.

$$\begin{aligned} dF_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\Big) &= dF_x((d\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i)) = d(\psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) \\ &= (d\psi^{-1})_{\psi(F(x))} \circ d(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) \\ &= (d\psi^{-1})_{\psi(F(x))}\Big(\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_\alpha}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot e_\alpha\Big) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_\alpha}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot (d\psi^{-1})_{\psi(F(x))}(e_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_\alpha}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial z_\alpha}(F(x)). \end{aligned}$$

□

Aus der Algebra wissen wir, dass man jedem Vektorraum sein algebraisches Dual zuordnen kann. Dies tun wir jetzt mit den Tangentialräumen an eine Untermannigfaltigkeit. Insbesondere wollen wir die dualen Basen zu den kanonischen Basen in den Tangentialräumen beschreiben.

Definition. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $x \in M$ und T_xM der Tangentialraum an x. Der Vektorraum*

$$T_x^*M := \{L : T_xM \longrightarrow \mathbb{R} \mid L \text{ linear}\}$$

heißt dualer Tangentialraum an M im Punkt x (oder auch Cotangentialraum).

Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare reellwertige Abbildung und $x \in M$. Das Differential $df_x : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ von f im Punkt x ist linear, also ist $df_x \in T_x^*M$.
Insbesondere sind die Koordinatenfunktionen $x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ einer Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots x_n))$ glatte reellwertige Abbildungen. Also ist $(dx_i)_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ linear und somit gilt $(dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x \in T_x^*M$.

Satz 9.10 *Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte auf M um x mit kanonischer Basis $(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x))$ in T_xM. Dann bilden die Differentiale $((dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x)$ die duale Basis im Cotangentialraum T_x^*M, d.h.*

$$(dx_i)_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(x)\Big) = \delta_{ij} \qquad \forall\, i,j = 1, \dots n.$$

Beweis: Einsetzen der Definition ergibt

$$\begin{aligned} (dx_i)_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(x)\Big) &= (dx_i)_x\Big(\frac{d}{dt}(\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_j)\Big)|_{t=0} = \frac{d}{dt} x_i(\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_j))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\varphi(x) + te_j)_i|_{t=0} = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

□

Aus der Transformationsformel für duale Basen (siehe Lineare Algebra) erhalten wir die folgende Transformationsformel für die dualen Basen

Folgerung. *Sind* $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ *und* $(W, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ *zwei Karten auf* M *um* x, *so gilt*

$$(dy_\alpha)_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_\alpha}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot (dx_i)_x.$$

9.5 Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten

Definition. *Ein Vektorfeld auf einer Untermannigfaltigkeit* $M^n \subset \mathbb{R}^N$ *ist eine* C^∞*–Abbildung* $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *, so daß* $X(x) \in T_xM$ *für alle* $x \in M$ *gilt.*

Bemerkung: Sei $\mathfrak{X}(M)$ die Menge aller Vektorfelder auf M, dann gilt

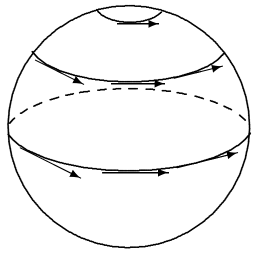
1. Sind $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, so ist auch $X_1 + X_2 \in \mathfrak{X}(M)$.
2. Ist $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$, so ist auch $fX \in \mathfrak{X}(M)$.

$\mathfrak{X}(M)$ ist also ein Modul über dem Ring $C^\infty(M)$ der glatten Funktionen.

Beispiel 1:
Die Abbildung $X : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$X(x, y, z) := (-y, x, 0)$$

ist ein Vektorfeld auf der Sphäre
$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.



Beispiel 2: **Kanonische Basisfelder**
Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Karte auf einer Untermannigfaltigkeit M und bezeichne $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(x))$ den im letzen Abschnitt definierten i. kanonischen Basisvektor der Karte (U, φ) im Punkt $x \in U$. Da die Abbildungen $\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}$ und φ differenzierbar sind, ist die Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^N ,$$

die jedem Punkt $x \in U$ den kanonischen Basisvektor $\frac{\partial}{\partial x_i}(x)$ zuordnet, ein glattes Vektorfeld auf dem Kartenbereich $U \subset M$. Das n-Tupel der Abbildungen $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ heißt *kanonisches Basisfeld bezüglich* (U, φ).

Jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ kann man über dem Kartenbereich U punktweise in der kanonischen Basis darstellen:

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(x). \qquad (*)$$

Die Komponenten in dieser Basisdarstellung definieren glatte Funktionen $\xi_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Kartenbereich, $i = 1, \ldots, n$. (*) nennt man *Basisdarstellung des Vektorfeldes X* bezüglich der Karte (U, φ). Die Kartendarstellungen der Koordinatenfunktionen ξ_i

$$\xi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißen *Komponenten von X bezüglich der Karte (U, φ).*

Als nächstes übertragen wir die Definition der Richtungsableitung, die wir im $\mathbb{R}^n$ bereits kennen, auf den Fall der Untermannigfaltigkeiten.

Definition. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung mit Werten in einem reellen Vektorraum.*

1. Sei $v \in T_xM$ ein Tangentialvektor an M im Punkt x. Der Vektor

$$v(F) := dF_x(v) \in T_{F(x)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$$

heißt Richtungsableitung von F nach dem Vektor v.

2. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M. Die Abbildung $X(F) : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$, definiert durch

$$X(F)(x) := dF_x(X(x)),$$

heißt Richtungsableitung von F nach dem Vektorfeld X.

Den Beweis der folgenden Eigenschaften der Richtungsableitung lassen wir als Übungsaufgabe

Satz 9.11 *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld und $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ zwei Abbildungen in reelle Vektorräume. Dann gilt*

1. *$X(F) \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$.*

2. *Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine Karte um x und $X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ die Basisdarstellung von X bezüglich der kanonischen Basis dieser Karte. Dann gilt für die Richtungsableitung*

$$X(F) = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}(F) = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial (F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi.$$

   Insbesondere ist die Richtungsableitung von F nach dem Basisvektorfeld $\frac{\partial}{\partial x_i}$ gegeben durch die partielle Ableitung der Kartendarstellung von F nach der i. Koordinate.

3. *Die Richtungsableitung erfüllt die folgende Produktregel*

$$X(f \cdot F) = X(f) \cdot F + f \cdot X(F)\ .$$

Abschließend wollen wir eine Methode kennenlernen, mit der man zwei Vektorfeldern auf M ein neues Vektorfeld, den sogenannten Kommutator, zuordnen kann.
Nach Definition ist ein Vektorfeld X auf M eine glatte Abbildung von M mit Werten im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^N$. Dass diese glatte Abbildung X außerdem ein Vektorfeld auf M beschreibt, drückt sich in einer *zusätzlichen* Eigenschaft der Bilder dieser Abbildung aus: $X(x)$ ist tangential an M im Punkt x. Man kann also ein Vektorfeld X, betrachtet als glatte Abbildung $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$, in Richtung eines anderen Vektorfeldes Y ableiten. In der Regel ist dann zwar $Y(X) : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine glatte Abildung, aber kein Vektorfeld auf M mehr, da die Werte $Y(X)(x)$ nicht tangential an M in x sind. Diese nichttangentiale "Störung" kann man beseitigen, indem man die vertauschte Richtungsableitung wieder abzieht. Es gilt der folgende Satz:

Satz 9.12 *Seien X und Y zwei Vektorfelder auf einer n-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$. Dann definiert die glatte Abbildung*

$$[X,Y] := X(Y) - Y(X) : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

ein Vektorfeld auf M. (Hierbei ist $X(Y)$ die Richtungsableitung der Abbildung $Y : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ nach dem Vektorfeld X und $Y(X)$ die Richtungsableitung der Abbildung $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ nach dem Vektorfeld Y). Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte um x bezüglich derer X bzw. Y die Basisdarstellungen $X|_U = \sum\limits_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ bzw. $Y|_U = \sum\limits_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ haben. Dann gilt

$$[X,Y]|_U = \sum_{i=1}^n (X(\eta_i) - Y(\xi_i)) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definition. *Seien X und Y zwei Vektorfelder auf einer Untermannigfaltigkeit M. Das Vektorfeld $[X,Y]$ heißt Kommutator von X und Y.*

Beweis von Satz 9.12: Um zu zeigen, dass $[X,Y]$ ein Vektorfeld auf M ist, müssen wir zeigen, dass $[X,Y](x) \in T_xM$ für alle $x \in M$ gilt. Dazu betrachten wir die Basisdarstellung der Vektorfelder X und Y bzgl. einer beliebigen Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ und zeigen, dass auch $[X,Y]$ sich durch die kanonischen Basisfelder dieser Karte darstellen läßt.
Über $U \subset M$ erhält man unter Anwendung der Produktregel für die Richtungsableitung

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= X\Big(\sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big) - Y\Big(\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n \Big[X(\eta_i) - Y(\xi_i)\Big] \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \Big[\eta_i X\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) - \xi_i Y\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, daß die letzte Summe verschwindet. Wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \Big[\eta_i X\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) - \xi_i Y\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)\Big] &= \sum_{i,j=1}^n \Big[\eta_i \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) - \xi_i \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)\Big] \\
&= \sum_{i,j=1}^n \eta_i \xi_j \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \eta_i \xi_j \Big[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\Big]
\end{aligned}$$

bleibt zu beweisen, daß für den Kommutator von kanonischen Basisfeldern $[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}] = 0$ gilt. Aus der Definition der kanonischen Basisfelder folgt

$$\begin{aligned}
\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\Big] &= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\Big(\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big) \circ \varphi\Big) - \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big(\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_j}\Big) \circ \varphi\Big) \\
&= \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x_j \partial x_i} \circ \varphi - \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j} \circ \varphi.
\end{aligned}$$

Da dies die üblichen partiellen Ableitungen sind und alle Abbildungen glatt sind, folgt die Behauptung aus dem Symmetrie-Lemma von Schwarz. (Die gleiche Aussage gilt, falls die Untermannigfaltgkeit und die Vektorfelder mindestens von der Klasse C^2 sind. □

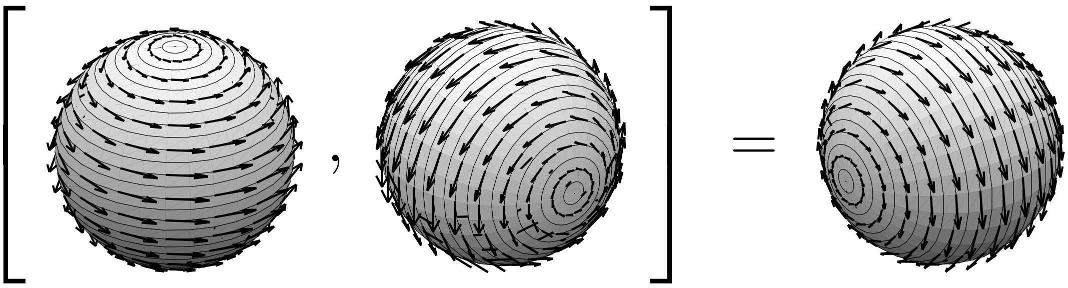
Folgerung. *Für den Kommutator von kanonischen Basisfeldern gilt*

$$\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big] \equiv 0.$$

Beispiel: Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-dimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten die folgenden drei Vektorfelder auf S^2:

$$X(x,y,z) := (-y,x,0) \quad , \quad Y(x,y,z) = (-z,0,x) \quad , \quad Z(x,y,z) = (0,-z,y)$$

Dann gilt für den Kommutator $[X,Y] = Z$ (Übungsaufgabe 9.8). Das folgende nette Bild (es stammt von Thomas Neukirchner) veranschaulicht dies:



Den Beweis der folgenden Eigenschaften des Kommutators lassen wir als Übungsaufgabe (Aufgabe 9.9).

Satz 9.13 (Eigenschaften des Kommutators von Vektorfeldern) *Es seien X, Y, Z Vektorfelder und f, g Funktionen auf einer Untermannigfaltigkeit. Dann gilt*

a) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ *(Jacobi-Identität)*

b) $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

c) $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

9.6 Orientierbare und nichtorientierbare Untermannigfaltigkeiten

Man unterscheidet zwei Typen von Mannigfaltigkeiten, die orientierbaren und die nichtorientierbaren. Für die orientierbaren Mannigfaltigkeiten sind viele Begriffe technisch einfacher zu definieren und zu handhaben. Bevor wir diese beiden Typen von Untermannigfaltigkeiten definieren, erinnern wir nochmal an den Begriff der Orientierung eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraumes, der aus der Algebra bekannt ist.
Sei V^n ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\mathcal{B}(V)$ die Menge der Basen in V. Seien $\underline{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ und $\underline{\mathfrak{b}} = (\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)$ zwei Basen in V und bezeichne $M_{\underline{\mathfrak{a}},\underline{\mathfrak{b}}} := \big(M_{ij}\big)$ ihre Übergangsmatrix, die durch

$$\mathfrak{a}_j = \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\mathfrak{b}_i$$

definiert ist.
Wir nennen die Basen $\underline{\mathfrak{a}}$ und $\underline{\mathfrak{b}}$ *gleichorientiert* (und schreiben $\underline{\mathfrak{a}} \sim \underline{\mathfrak{b}}$), falls die Determinante der Übergangsmatrix $M_{\underline{\mathfrak{a}},\underline{\mathfrak{b}}}$ positiv ist. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{B}(V)$ und der Faktorraum $\mathcal{B}(V)/\sim$ hat genau zwei Elemente.
Eine *Orientierung* $\mathcal{O}_V$ von V ist eine Äquivalenzklasse $\mathcal{O}_V := [\underline{\mathfrak{a}}]$ von Basen.

Sei $(V, \mathcal{O}_V)$ ein orientierter Vektorraum. Eine Basis $\underline{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) \in \mathcal{B}(V)$ heißt *positiv orientiert*, falls $\underline{\mathfrak{a}} \in \mathcal{O}_V$.

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ fixieren wir die durch die kanonische Basis gegebene Orientierung und bezeichnen sie mit $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$, d.h. $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} := [(e_1, \dots, e_n)]$.
Ist speziell $V = \mathbb{R}^2$, dann ist $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$, falls $\mathfrak{a}_1$ durch eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel φ, mit $0 < \varphi < \pi$, in ein positives Vielfaches von $\mathfrak{a}_2$ überführt werden kann.
Ist $V = \mathbb{R}^3$, so ist $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ positiv orientiert, falls die "Rechte–Hand–Regel" gilt.

Ähnlich wie wir das bei den Vektorfeldern getan haben, werden wir den Begriff der Orientierung nun auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Unter einer Orientierung einer Untermannigfaltigkeit M werden wir eine Familie von Orientierungen in jedem Tangentialraum T_xM von M verstehen, die in einem zu präzisierenden Sinne glatt vom Fußpunkt x des Tangentialraumes abhängt.

Definition. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit. M^n heißt orientierbar, falls eine Familie von Orientierungen $\mathcal{O}_M = \{\mathcal{O}_{T_xM}\}_{x \in M}$ in den Tangentialräumen existiert, die lokal um jeden Punkt durch kanonische Basisfelder von Karten der Untermannigfaltigkeit zu realisieren sind, d.h. für jedes $x \in M$ gibt es eine Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ um x mit*

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y)\Big) \in \mathcal{O}_{T_yM} \qquad \text{für alle } y \in U.$$

Eine solche Karte (U, φ) heißt positiv orientiert. Die Familie $\mathcal{O}_M$ heißt Orientierung von M. Das Paar $(M, \mathcal{O}_M)$ heißt orientierte Untermannigfaltigkeit.

Während jeder endlich-dimensionale reelle Vektorraum genau zwei Orientierungen besitzt, müssen Mannigfaltigkeiten nicht notwendig orientierbar sei. Man hat das folgende Kriterium für Orientierbarkeit

Satz 9.14 *Eine Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^N$ ist genau dann orientierbar, wenn ein Atlas $\mathcal{A}$ auf M existiert, so daß für alle Karten $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ gilt*

$$\det\big(D(\psi \circ \varphi^{-1})_u\big) > 0 \quad \text{für alle } u \in \varphi(U \cap V) \qquad (*).$$

Beweis: $(\Rightarrow)$ Sei M orientierbar. Wir definieren

$$\mathcal{A} := \{(U, \varphi) \,|\, (U, \varphi) \text{ ist positiv orientierte Karte auf } M\}.$$

Aus der Definition der Orientierbarkeit folgt, daß $\mathcal{A}$ die Mannigfaltigkeit M überdeckt. Sind also (U, φ) und (V, ψ) zwei Karten aus $\mathcal{A}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$, so ist die Determinante der Übergangsmatrix der induzierten Basen in T_xM für $x \in U \cap V$ strikt positiv. Nach Satz 9.8 ist diese Determinante gerade durch die Jacobi–Determinante des Koordinatenübergangs gegeben.
$(\Leftarrow)$ Sei $\mathcal{A}$ ein Atlas mit der Eigenschaft (*) und $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Wir definieren Orientierungen auf den Tangentialräumen durch

$$\mathcal{O}_{T_xM} := \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)\Big)\Big], \qquad x \in U$$

Da die Determinante der Übergangsmatrix zwischen zwei kanonischen Basen von Karten aus $\mathcal{A}$ strikt positiv ist, ist $\mathcal{O}_{T_xM}$ korrekt definiert und erfüllt die Forderung aus der Definition.

□

Für den Spezialfall von Hyperfächen $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hat man das folgende leicht nachprüfbare Kriterium für Orientierbarkeit:

Satz 9.15 *Eine Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist genau dann orientierbar, wenn auf M ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld existiert, d.h. eine stetige Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} : M^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\longmapsto \mathfrak{n}(x) \in N_x M \subset \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

mit $\|\mathfrak{n}(x)\| = 1$ für jedes $x \in M$.

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei M orientiert. Sei $x \in M$ und $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine positiv orientierte Karte um x. $\frac{\partial}{\partial x_1}(x) \times \ldots \times \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ bezeichne das Vektorprodukt der kanonischen Basisvektoren der Karte im $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann definieren wir

$$\mathfrak{n}(x) := \frac{\frac{\partial}{\partial x_1}(x) \times \ldots \times \frac{\partial}{\partial x_n}(x)}{\|\frac{\partial}{\partial x_1}(x) \times \ldots \times \frac{\partial}{\partial x_n}(x)\|}.$$

Entsprechend der Eigenschaften des Vektorproduktes steht der Vektor $\mathfrak{n}(x)$ senkrecht auf dem Tangentialraum $T_x M$. Die Definition ist korrekt, d.h. unabhängig von der gewählten positiv orientierten Karte, da für das Vektorprodukt von jeweils n linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ bzw. $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ im $\mathbb{R}^{n+1}$, die den gleichen n-dimensionalen Unterraum aufspannen, gilt

$$\frac{\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_n}{\|\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_n\|} = \frac{\mathfrak{b}_1 \times \ldots \times \mathfrak{b}_n}{\|\mathfrak{b}_1 \times \ldots \times \mathfrak{b}_n\|} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \sim (\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n).$$

Die Abbildung $\mathfrak{n} : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ist stetig (sogar glatt), weil die Abbildungen $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i} \circ \varphi$ und $\| \cdot \|$ es sind.
($\Leftarrow$) Sei eine stetige Abbildung $\mathfrak{n}$ wie oben gegeben. Wir definieren eine Orientierung $\mathcal{O}_M = \{\mathcal{O}_{T_x M}\}_{x \in M}$ auf M^n durch

$$(v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{O}_{T_x M} \quad \Longleftrightarrow \quad (v_1, \ldots, v_n, \mathfrak{n}(x)) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{n+1}}. \qquad (**)$$

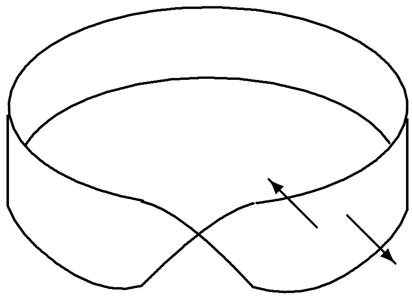
Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine Karte um $x \in M$ mit zusammenhängendem Kartenbereich U. Aus Stetigkeitsgründen hat die Determinante der $(n+1) \times (n+1)$ - Matrix

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y), \mathfrak{n}(y)\Big)$$

in jedem Punkt $y \in U$ das gleiche Vorzeichen. Ist dies Vorzeichen positiv, so ist die Karte (U, φ) positiv orientiert. Ist dies Vorzeichen negativ, so ersetzt man die Karte (U, φ) durch die Karte $(U, \tilde{\varphi} = (-x_1, x_2, \ldots, x_n))$ und erhält dadurch eine positiv orientierte Karte. Folglich definiert (**) tatsächlich eine Orientierung von M. □

Beispiel 1: **Die Sphäre**
Die n–dimensionale Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist orientierbar, denn die Abbildung $\mathfrak{n} : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, definiert durch $\mathfrak{n}(x) = \frac{x}{\|x\|}$, ist ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld auf S^n.

Beispiel 2: Das Möbiusband



Nimmt man ein langes Band, verdreht eines der Enden einmal und klebt es dann zusammen, so entsteht das sogenannte Möbiusband im $\mathbb{R}^3$. Dies ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand, die nicht orientierbar ist. Um das zu sehen, betrachtet man die Mittellinie, die um das Möbiusband herumläuft. Nimmt man einen beliebigen Normalenvektor in einem Punkt dieser Mittellinie und schlendert entlang der Mittellinie einmal um das Möbiusband herum, wobei man den Normalenvektor stetig mitführt, so landet man im Ausgangspunkt beim negativen Normalenvektor. Es kann also kein stetiges Normalenfeld geben.

Beispiel 3: Gleichungsdefinierte Hyperflächen

Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞–Abbildung, $M = F^{-1}(0)$ und $dF_x \neq 0$ für alle $x \in M$. Dann ist M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Für den Normalenraum gilt $N_xM = \mathbb{R} \cdot \mathrm{grad} F(x)$ (siehe Abschnitt 11.2). Die Hyperflache M ist orientierbar, denn durch

$$\mathfrak{n}(x) := \frac{\mathrm{grad}\, F(x)}{\|\mathrm{grad}\, F(x)\|}$$

ist ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld auf M gegeben.

9.7 Die induzierte Riemannsche Metrik einer Untermannigfaltigkeit

Wie im $\mathbb{R}^n$ möchte man auch auf Untermannigfaltigkeiten "Geometrie betreiben", d.h. z.B. Längen von Kurven, Abstände zwischen Punkten oder Volumen von Teilmengen definieren und berechnen können. Grundlegend für alle geometrischen Begriffe und Untersuchungen ist der Begriff der Riemannschen Metrik. Aus der Riemannschen Metrik kann man alles andere definieren und herleiten. Man kann sehr verschiedene Riemannsche Metriken auf Mannigfaltigkeiten definieren. Für die Untermannigfaltigkeiten, die in diesem Kapitel studiert werden, beschränken wir uns auf die sogenannte "induzierte Riemannsche Metrik", die aus dem Euklidischen Skalarprodukt des Einbettungsraumes entsteht.
Sei M^n eine Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^N$. Auf dem $\mathbb{R}^N$ ist das Euklidische Skalarprodukt

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle := \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot b_i \qquad \mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_N)\ ,\ \mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_N)$$

gegeben. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert ein Skalarprodukt auf jedem Unterraum $T_xM \subset \mathbb{R}^N$.

Definition. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ das Skalarprodukt*

$$g_x(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) := \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle.$$

Die Familie $g = \{g_x\}_{x \in M}$ dieser Skalarprodukte heißt induzierte Riemannsche Metrik auf M.

Definition. *Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine Karte auf M um x. Wir betrachten die symmetrische, positiv–definite $(n \times n)$–Matrix*

$$\big(g_{ij}(x)\big)_{i,j} := \Big(g_x\big(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\big)\Big)_{i,j} = \Big(\Big\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\Big\rangle\Big)_{i,j}.$$

Die Funktionen $g_{ij} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißen lokale Koeffizienten der Metrik g bezüglich der Karte (U, φ).

Beispiel 1: Die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik in Euklidischen Koordinaten: Sei M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten auf M die Karte, die durch die Euklidischen Koordinaten gegeben wird: $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$. Für die kanonische Basis gilt dann $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = e_i \in T_xM = \mathbb{R}^n$. Folglich gilt

$$g_{ij}(x) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

das heißt die Matrix der Metrik ist die Einheitsmatrix $\big(g_{ij}(x)\big) = I_n$.

Beispiel 2: Die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik in Polarkoordinaten:
Wir betrachten Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$.
Sei $\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \longrightarrow U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^2$ die Parametrisierung durch Polarkoordinaten

$$\Phi(r, v) = (r \cos v, r \sin v)$$

Für die Karte (U, Φ^{-1}) gilt dann in $x = \Phi(r, v)$

$$\frac{\partial}{\partial r}(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, v) = (\cos v, \sin v) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial v}(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(r, v) = (-r \sin v, r \cos v)\,.$$

Somit erhält man

$$\Big\langle \frac{\partial}{\partial r}(x), \frac{\partial}{\partial r}(x)\Big\rangle = 1, \quad \Big\langle \frac{\partial}{\partial r}(x), \frac{\partial}{\partial v}(x)\Big\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \Big\langle \frac{\partial}{\partial v}(x), \frac{\partial}{\partial v}(x)\Big\rangle = r^2.$$

Die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik in Polarkoordinaten hat folglich die Gestalt

$$\big(g_{ij}(x)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3: Die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik auf der Sphäre S^2 in sphärischen Koordinaten:
Seien $\Phi : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow S^2$ die sphärischen Koordinaten

$$\Phi(v, u) = (\cos v \cos u, \sin v \cos u, \sin u).$$

Dann gilt in $x = \Phi(v, u)$ für die kanonischen Basisvektoren der durch diese Parametrisierung definierten Karte Φ^{-1}

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}(x) &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}(v, u) = (-\sin v \cos u, \cos v \cos u, 0) \quad , \\
\frac{\partial}{\partial u}(x) &= \frac{\partial \Phi}{\partial u}(v, u) = (-\cos v \sin u, -\sin v \sin u, \cos u)\ .
\end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\Big\langle \frac{\partial}{\partial v}(x), \frac{\partial}{\partial v}(x)\Big\rangle = \cos^2 u, \quad \Big\langle \frac{\partial}{\partial v}(x), \frac{\partial}{\partial u}(x)\Big\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \Big\langle \frac{\partial}{\partial u}(x), \frac{\partial}{\partial u}(x)\Big\rangle = 1.$$

Die Matrix der induzierten Metrik auf S^2 hat in sphärischen Koordinaten folglich die Gestalt

$$\big(g_{ij}(x)\big) = \begin{pmatrix} \cos^2 u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.8 Gradient, Divergenz und Laplace–Operator auf Untermannigfaltigkeiten

Die induzierte Riemannsche Metrik liefert in jedem Tangentialraum T_xM ein nichtausgeartetes positiv definites Skalarprodukt g_x. Mit seiner Hilfe kann man in völliger Analogie zum $\mathbb{R}^n$ den Gradienten von Funktionen, die Divergenz von Vektorfeldern und den Laplace–Operator auf Funktionen auch für Untermannigfaltigkeiten definieren. Diese Begriffe werden später in den Integralsätzen (siehe Abschnitt 11.11.) eine Rolle spielen.

Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung auf einer Untermannigfaltigkeit M. Dann ist das Differential $df_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung auf dem Euklidischen Vektorraum (T_xM, g_x). Wie man aus der Algebra weiß, entspricht dieser linearen Abbildung ein eindeutig bestimmter " dualer" Vektor in T_xM. Dies definiert den Gradienten von f:

Definition. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit mit ihrer induzierten Riemannschen Metrik und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte reellwertige Funktion auf M. Der Gradient von f ist das Vektorfeld*

$$\operatorname{grad} f : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

auf M, das jedem Punkt $x \in M$ den zur Linearform df_x dualen Vektor $\operatorname{grad} f(x) \in T_xM$ *zuordnet, d.h.:*

$$g_x(\operatorname{grad} f(x), \mathfrak{a}) := df_x(\mathfrak{a}) \qquad \forall\, \mathfrak{a} \in T_xM.$$

Der folgende Satz gibt die lokale Darstellung des Gradienten in der kanonischen Basis einer Karte an und zeigt insbesondere die Glattheit der Abbildung $\operatorname{grad} f$.

Satz 9.16 *Sei $f \in C^\infty(M^n)$ und $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine Karte auf M. Bezeichne weiterhin $\hat{f} := f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ die Kartendarstellung von f und $\big(g^{ij}(x)\big)$ die inverse Matrix zu $\big(g_{ij}(x)\big) = \Big(g_x\big(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\big)\Big)$. Dann gilt über dem Kartenbereich U*

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \Big(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} \circ \varphi\Big) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j},$$

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
df_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x)\Big) &= \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\alpha}(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x))\ \delta_{i\alpha} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot g^{ij}(x) \cdot g_{j\alpha}(x) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot g^{ij}(x) \cdot g_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(x), \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x)\Big) \\
&= g_x\Big(\sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x) \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(x), \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x)\Big),
\end{aligned}$$

für alle α. Andererseits ist nach Definition

$$g_x\Big(\operatorname{grad} f(x), \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x)\Big) = df_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x)\Big).$$

Die Behauptung folgt dann aus der Nichtausgeartetheit des Skalarprodukts. □

Beispiel 1: Der Gradient einer Funktion in Euklidischen Koordinaten:
Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung. Wir bestimmen die Darstellung des Gradienten von f in der durch die Euklidischen Koordinaten gegebenen Karte $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$. Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, ist die Martix der induzierten Riemannschen Metrik gezüglich dieser Karte die Einheitsmatrix: $\big(g_{ij}(x)\big) = \big(g^{ij}(x)\big) = I_n$ und $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = e_i$. Für den Gradienten gilt also in Euklidischen Koordinaten

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Big).$$

Beispiel 2: Der Gradient von $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten:
Es sei $\Phi(r, v) := (r \cos v, r \sin v)$ die Parametrisierung durch Polarkoordinaten. Im letzten Abschnitt haben wir die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik in der durch diese Parametrisierung gegebenen Karte Φ^{-1} bestimmt. Sei $x = \Phi(r, v)$ und bezeichne zur Abkürzung $\hat{f} := f \circ \Phi$ die Kartendarstellung von f. Dann gilt

$$\big(g_{ij}(x)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \big(g^{ij}(x)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

und

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r}(r, v) \cdot \frac{\partial}{\partial r}(x) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \hat{f}}{\partial v}(r, v) \cdot \frac{\partial}{\partial v}(x).$$

Beispiel 3: Der Gradient einer Funktion $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ in sphärischen Koordinaten:
Es sei $\Phi(v, u) := (\cos v \cos u, \sin v \cos u, \sin u)$ die lokale Parametrisierung der Sphäre durch sphärische Koordinaten. Sei $x = \Phi(v, u)$ und $\hat{f} = f \circ \Phi$ die Kartendarstellung von f in diesen Koordinaten. Für die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik in der durch die spärischen Koordinaten definierten Karte gilt entsprechend dem vorigen Abschnitt

$$\big(g_{ij}(x)\big) = \begin{pmatrix} \cos^2 u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \big(g^{ij}(x)\big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 u} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Gradienten gilt folglich

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{1}{\cos^2 u} \frac{\partial \hat{f}}{\partial v}(v, u) \cdot \frac{\partial}{\partial v}(x) + \frac{\partial \hat{f}}{\partial u}(v, u) \cdot \frac{\partial}{\partial u}(x).$$

Der Gradient ordnet jeder Funktion auf M ein Vektorfeld zu. Als nächstes betrachten wir den umgekehrten Prozess. Wir ordnen jedem Vektorfeld eine Funktion zu.

Definition. *Sei X ein Vektorfeld auf der Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^N$. Die Divergenz von X ist die Funktion* $\operatorname{div}(X) \in C^\infty$*, die jedem Punkt $x \in M$ die Zahl*

$$\operatorname{div}(X)(x) := \sum_{i=1}^{n} \langle a_i(X), a_i \rangle,$$

zuordnet, wobei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine orthonormale Basis im Euklidischen Vektorraum (T_xM, g_x) ist und $a_i(X) \in \mathbb{R}^N$ die Richtungsableitung der Abbildung $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ in Richtung des Vektors a_i bezeichnet.

Man überzeugt sich schnell davon, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der orthonormalen Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ ist. Somit ist $\operatorname{div}(X)$ korrekt definiert.

Wir wollen auch die Divergenz durch lokale Koordinaten beschreiben. Um dies zu tun, beweisen wir zunächst ein hilfreiches Lemma

Lemma. *Sei $U : I \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ eine differenzierbare Kurve in der Gruppe der Matrizen. Dann ist*

$$\operatorname{Spur}(U^{-1}(s) \circ U'(s)) = \frac{d}{ds} \ln(\det U(s)).$$

Beweis:
1. Schritt: Sei $A \in GL(n, \mathbb{C})$ eine invertierbare und $H \in M(n, \mathbb{C})$ eine beliebige Matrix. Dann gilt

$$\lim_{t \to 0} \frac{\det(A + tH) - \det(A)}{t} = \det(A) \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\det(I_n + tA^{-1}H) - \det I_n}{t} \quad (*).$$

Für die Determinante erhält man

$$\det(I_n + tB) = \left| \begin{pmatrix} 1 + tb_{11} & tb_{12} & \ldots & tb_{1n} \\ tb_{21} & 1 + tb_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ tb_{n1} & \ldots & tb_{nn-1} & 1 + tb_{nn} \end{pmatrix} \right| = 1 + t \operatorname{Spur} B + O(t^2).$$

Beim Übergang zum Differenzenquotienten sind nur die konstanten und in t linearen Terme relevant. Also gilt

$$(*) = \det(A) \cdot \operatorname{Spur}(A^{-1} \circ H).$$

2. Schritt: Wir betrachten $f(t) = \det(U(s) + tU'(s))$. Differenzieren ergibt

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\det(U(s) + tU'(s)) - \det(U(s))}{t} \overset{1.}{=} \det(U(s)) \cdot \operatorname{Spur}(U^{-1}(s) \circ U'(s)).$$

Aus der Kettenregel folgt dann, daß $f'(0) = d(\det)_{U(s)}(U'(s))$ und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln(\det(U(t)))|_{t=s} &= \frac{1}{\det(U(s))} \frac{d}{dt} (\det(U(t)))|_{t=s} = \frac{1}{\det(U(s))} \cdot d(\det)_{U(s)}(U'(s)) \\ &= \frac{f'(0)}{\det(U(s))} = \operatorname{Spur}(U^{-1}(s) \circ U'(s)). \end{aligned}$$

□

Wir beweisen jetzt folgende lokale Formel für die Divergenz eines Vektorfeldes:

Satz 9.17 *Sei X ein Vektorfeld auf einer Untemannigfaltigkeit M und $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine Karte auf M, bezüglich der X die Basisdarstellung $X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ hat. Sei $\left(g_{ij}(x) = g_x(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\right)$ die Matrix der Metrik bzgl. der gegebenen Karte und $\left(g^{ij}(x)\right) := \left(g_{ij}(x)\right)^{-1}$ die inverse Matrix. Desweiteren bezeichne $\theta(x) := \det(g_{ij}(x))$ die Determinante dieser Matrix. Dann gilt über dem Kartenbereich U*

$$\operatorname{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\xi^i \sqrt{\theta}).$$

Beweis: Sei $(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x))$ die durch die gegebene Karte induzierte kanonische Basis und $(a_1, \ldots, a_n)$ eine beliebige ONB in T_xM. Dann ist $a_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}(x)$ für eine Matrix

$A = (A_{ij})$. Sei weiterhin $E := (\delta_{ij})$ die Einheitsmatrix und $G := (g_{ij}(x))$. Die Matrizen G und A hängen folgendermaßen zusammen:

$$E = (g_x(a_i, a_j)) = \Big(\sum_{k,l=1}^{n} A_{ik} g_{kl} A_{jl}\Big) = A \circ G \circ A^t, \qquad \text{also} \quad G^{-1} = A^t \circ A$$

Insbesondere ist

$$g^{ij} = (A^t A)_{ij} \quad (*)$$

Für die Divergenz erhalten wir nach Definition

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle a_i(X), a_i \rangle = \sum_{i,k,l=1}^{n} A_{ik} \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_k}(X), \frac{\partial}{\partial x_l} \Big\rangle A_{il} \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} A_{ik} A_{il}\Big) \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_k}(X), \frac{\partial}{\partial x_l} \Big\rangle \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} (A^t A)_{kl} \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_k}(X), \frac{\partial}{\partial x_l} \Big\rangle \overset{(*)}{=} \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_k}(X), \frac{\partial}{\partial x_l} \Big\rangle
\end{aligned}$$

Nun setzen wir für X die Basisdarstellung $X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ein und benutzen die Rechenregeln für die Richtungsableitung. Außerdem werden wir in der folgenden Rechnung die Vertauschbarkeit der Richtungsableitungen von kanonischen Basisfeldern entsprechend der Formel

$$\Big[\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big] = \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) = 0$$

benutzen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(X) &= \sum_{j,k,l=1}^{n} g^{kl} \Big(\Big\langle \frac{\partial}{\partial x_k}(\xi_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \Big\rangle + \xi_j \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big), \frac{\partial}{\partial x_l} \Big\rangle \Big) \\
&= \sum_{j,k,l=1}^{n} \Big[\frac{\partial}{\partial x_k}(\xi_j) g^{kl} g_{jl} + \xi_j g^{kl} \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big), \frac{\partial}{\partial x_l} \Big\rangle \Big] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\xi_j) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big), \frac{\partial}{\partial x_l} \Big\rangle \quad (**),
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile im 2. Summanden die Indizes j und k entsprechend dem oben gesagten vertauscht haben. Den 2. Summanden formen wir weiter um. Dazu zerlegen wir ihn in zwei gleiche Teile und benennen im 2. Teil die Indizes k und l um. Außerdem benutzen wir die Symmetrie der Metrik, die Ableitungsregel für das Skalarprodukt von vektorwertigen Funktionen und das vorhergehende Lemma aus.

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big), \frac{\partial}{\partial x_l} \Big\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big), \frac{\partial}{\partial x_l} \Big\rangle + \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^{n} g^{lk} \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}\Big), \frac{\partial}{\partial x_k} \Big\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big), \frac{\partial}{\partial x_l} \Big\rangle + \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^{n} g^{kl} \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}\Big) \Big\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\Big\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \Big\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{kl}) = \frac{1}{2} \operatorname{Spur}\Big(G^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x_j}(G)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{Lemma}{=} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\ln(\det G)) \\
&= \quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\ln(\theta)) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\ln\sqrt{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{\theta})
\end{aligned}
$$

Mit $(**)$ folgt schließlich

$$
\operatorname{div}(X) = \sum_{j=1}^{n}\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}(\xi^j) + \frac{1}{\sqrt{\theta}}\cdot\xi^i\frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{\theta})\Big] = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\cdot\sum_{j=1}\frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{\theta}\cdot\xi^j).
$$

□

Wir betrachten auch wieder unsere 3 Beispiele:

Beispiel 1: Die Divergenz eines Vektorfeldes in Euklidischen Koordinaten:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ die Euklidischen Koordinaten. Dann ist eine orthonormale Basis im Tangentialraum von x gegeben durch $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Sei X ein Vektorfeld auf U mit $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$. Dann gilt

$$
\operatorname{div}(X)(x) = \sum_{i=1}^{n}\langle e_i(X), e_i\rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} e_i(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}(x).
$$

Beispiel 2: Die Divergenz eines Vektorfeldes auf $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten:
Sei $\Phi(r, v) = (r\cos v, r\sin v)$ die Parametisierung durch Polarkoordinaten, $x = \Phi(r, v)$ und $X(x) = \xi_1(r, v)\frac{\partial}{\partial r}(x) + \xi_2(r, \varphi)\frac{\partial}{\partial v}(x)$. Es gilt $\theta(x) = r^2$. Folglich ist

$$
\operatorname{div}(X)(x) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\xi_1)}{\partial r}(r, v) + \frac{\partial(r\xi_2)}{\partial v}(r, v)\right) = \frac{\partial\xi_1}{\partial r}(r, v) + \frac{1}{r}\xi_1(r, v) + \frac{\partial\xi_2}{\partial v}(r, v).
$$

Beispiel 3: Die Divergenz eines Vektorfeldes X auf der Sphäre S^2 in sphärischen Koordinaten:
Sei $\Phi(v, u) = (\cos v\cos u, \sin v\cos u, \sin u)$ die Parametrisierung durch sphärische Koordinaten, $x = \Phi(v, u)$ und $X(x) = \xi_1(v, u)\frac{\partial}{\partial v}(x) + \xi_2(v, u)\frac{\partial}{\partial u}(x)$ die lokale Darstellung des Vektorfeldes X in den sphärischen Koordinaten. Dann gilt $\theta(x) = \cos^2 u$. Folglich ist

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(X)(x) &= \frac{1}{\cos u}\left(\frac{\partial(\cos u\,\xi_1)}{\partial v}(v, u) + \frac{\partial(\cos u\,\xi_2)}{\partial u}(v, u)\right) \\
&= \frac{\partial\xi_1}{\partial v}(v, u) - \frac{\sin u}{\cos u}\,\xi_2(v, u) + \frac{\partial\xi_2}{\partial u}(v, u).
\end{aligned}
$$

Als letztes definieren wir den Laplace-Operators für Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten.

Definition. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte reellwertige Funktion auf M. $\triangle$ sei der folgende Operator auf $C^\infty(M)$:*

$$
\begin{aligned}
\triangle : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\
f &\longmapsto \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).
\end{aligned}
$$

Der Operator $\triangle$ heißt Laplace–Beltrami Operator.

In lokalen Koordinaten läßt sich der Laplace-Beltrami Operator folgendermaßen ausdrücken.

Satz 9.18 *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine Karte auf M und $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt mit den gleichen Bezeichnungen wie in Satz 9.17*

$$\triangle f = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \cdot g^{ij} \right).$$

Beweis: Gemäß Definition ist $\triangle f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$. Aus den Sätzen 9.16 und 9.17 (lokale Darstellung von div und grad) folgt über dem Kartenbereich U

$$\begin{aligned} \triangle(f|_U) &= \operatorname{div}\left(\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \Big) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{\theta} \sum_{i=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{\theta} \frac{\partial}{\partial x_i}(f) g^{ij} \right). \end{aligned}$$

□

Beispiel 1: Der Laplace–Beltrami Operator in Euklidischen Koordinaten:
Sei $M = \mathbb{R}^n$ und seien $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ die Euklidischen Koordinaten. Dann gilt

$$\triangle f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

.

Beispiel 2: Der Laplace–Beltrami Operator in Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$:
Seien $\Phi(r, v) = (r \cos v, r \sin v)$ die Polarkoordinaten, $x = \Phi(r, v)$ und $\hat{f} := f \circ \Phi$ die Kartendarstellung von f. Dann gilt

$$\triangle f(x) = \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial r^2}(r, v) + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{f}}{\partial r}(r, v) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial v}(r, v).$$

Beispiel 3: Der Laplace–Beltrami Operator auf S^2 in sphärischen Koordinaten.
Sei $\Phi(v, u) = (\cos v \cos u, \sin v \cos u, \sin u)$ die Parametrisierung durch sphärische Koordinaten, $x = \Phi(v, u)$ und $\hat{f} := f \circ \Phi$ die Kartendarstellung der Funktion f in den sphärischen Koordinaten. Dann gilt

$$\triangle f(x) = \frac{1}{\cos^2 u} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial v}(v, u) + \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial u}(v, u) - \tan u \, \frac{\partial \hat{f}}{\partial u}(v, u).$$

Abschließend beweisen wir einige Produktregeln für den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator.

Satz 9.19 (Produktregeln) *Sei M eine Untermannigfaltigkeit, $f, h \in C^\infty(M)$ und X ein Vektorfeld auf M. Dann gilt*

1. $\operatorname{grad}(f \cdot h) = f \cdot \operatorname{grad}(h) + h \cdot \operatorname{grad}(f)$,
2. $\operatorname{div}(f \cdot X) = f \cdot \operatorname{div}(X) + X(f)$,
3. $\triangle(f \cdot h) = f \cdot \triangle h + h \cdot \triangle f + 2\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(h) \rangle$.

Beweis: 1.) Sei Y ein beliebiges Vektorfeld auf M. Für die Richtungsableitung gilt dann

$$\langle \operatorname{grad}(f \cdot h), Y \rangle = Y(f \cdot h) = h \cdot Y(f) + f \cdot Y(h) = \langle h \cdot \operatorname{grad}(f) + f \cdot \operatorname{grad}(h), Y \rangle.$$

Die Behauptung folgt aus der Nichtausgeartetheit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
2.) Wir wählen eine lokales orthonormales Basisfeld $(a_1,\dots,a_n)$ über $U\subset M$. Dann läßt sich das Vektorfeld X über U in dieser Basis durch $X:=\sum\limits_{i=1}^{n}\langle X,a_i\rangle a_i$ ausdrücken. Es folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\cdot X) &= \sum_{i=1}^{n}\langle a_i(f\cdot X),a_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle a_i(f)\cdot X+f\cdot a_i(X),a_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\ \langle X,a_i\rangle\ a_i(f)+f\cdot\langle a_i(X),a_i\rangle \\
&= X(f)+f\cdot\operatorname{div}(X).
\end{aligned}$$

3.) Es gilt

$$\begin{aligned}
\triangle(f\cdot h) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f\cdot h)) \overset{1.)}{=} \operatorname{div}(h\cdot\operatorname{grad}(f)+f\cdot\operatorname{grad}(h)) \\
&\overset{2.)}{=} \operatorname{grad}(f)(h)+h\cdot\triangle f+\operatorname{grad}(h)(f)+f\cdot\triangle h \\
&= 2\langle\operatorname{grad}(h),\,\operatorname{grad}(f)\rangle+h\cdot\triangle f+f\cdot\triangle h.
\end{aligned}$$

□

9.9 Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten

Auf die gleiche Weise wie bei den Vektorfeldern und Orientierungen kann man auch die alternierenden multilinearen Abbildungen von Vektorräumen auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Man erhält die sogenannten Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten, die wir in diesem Abschnitt definieren und behandeln wollen. Mittels dieser Differentialformen werden wir in den folgenden Abschnitten Maße für orientierte Mannigfaltigkeiten definieren und die Eigenschaften der dadurch entstehenden Integrale untersuchen. Differentialformen spielen eine wichtige Rolle bei der Modellierung mathematischer und physikalischer Probleme. Man kann mit ihrer Hilfe z.B. Krümmungen in der Geometrie beschreiben oder auch analytische Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten charakterisieren.

9.9.1 Lokalisierungssatz für Differentialformen

Bevor wir die Differentialformen definieren, erinnern wir zunächst an einige Begriffe aus der Algebra.
Sei V ein n–dimensionaler reeller Vektorraum. Eine alternierende k–Form auf V ist eine Abbildung $\omega:\underbrace{V\times\ldots\times V}_{k-\text{mal}}\longrightarrow\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

1. ω ist multilinear, d.h. linear in jeder Komponente, und
2. ω ist alternierend, d.h. $\omega(\ldots,v_1,\ldots,v_2,\ldots)=-\omega(\ldots,v_2,\ldots,v_1,\ldots)$.

Mit Λ^kV^* bezeichnet man den Vektorraum der alternierenden k–Formen auf V. Speziell gilt $\Lambda^1V^*=V^*$.

Durch die folgende Operation kann man zwei alternierenden Multilinearformen eine neue solche Form zuordnen:

$$\begin{aligned}
\Lambda^kV^*\times\Lambda^lV^* &\longrightarrow \Lambda^{k+l}V^* \\
(\omega,\sigma) &\mapsto \omega\wedge\sigma
\end{aligned}$$

wobei

$$(\omega \wedge \sigma)(v_1, v_2, \ldots, v_{k+l}) := \sum_{\substack{\pi \in S_{k+l},\\ \pi(1)<\ldots<\pi(k),\\ \pi(k+1)<\ldots<\pi(k+l)}} \operatorname{sgn}(\pi)\, \omega\big(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}\big) \cdot \sigma\big(v_{\pi(k+1)}, \ldots, v_{\pi(k+l)}\big).$$

(S_{k+l} bezeichnet hier die Gruppe der Permutationen der Zahlen $1, \ldots, k+l$.)

Sei $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ eine Basis in V und bezeichne $(\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$ die dazu duale Basis in V^*. Dann ist

$$\{\sigma^{i_1} \wedge \ldots \wedge \sigma^{i_k} \,|\, 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\} \qquad (*)$$

eine Basis im Vektorraum der k-Formen $\Lambda^k V^*$. Insbesondere ist die Dimension des Raumes der k-Formen eines n-dimensionalen Vektorraumes durch $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$ zu berechnen. Eine k-Form ω läßt sich auf folgende Weise in der Basis (*) darstellen

$$\omega = \sum_{I=(1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n)} \omega(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})\, \sigma^{i_1} \wedge \ldots \wedge \sigma^{i_k} \qquad (**)$$

Die Zahlen $\omega(\mathfrak{a}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_k}) =: \omega_{i_1 \ldots i_k} \in \mathbb{R}$ heißen Komponenten von ω bezüglich der Basis $(\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$.
Wir werden im folgenden oft die folgende Abkürzung für die Basisdarstellung (**) benutzen: Ist $I = (1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n)$ ein geordneter Multiindex. Dann bezeichne

$$\omega_I := \omega(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \quad \text{und} \quad \sigma^I := \sigma^{i_1} \wedge \ldots \wedge \sigma^{i_k}$$

Wir schreiben also die Basisdarstellung von ω in der Kurzform

$$\omega = \sum_I \omega_I\, \sigma^I.$$

Abschließend erinnern wir noch an die folgende Rechenregel für n-Formen eines n-dimensionalen Vektorraumes V^n:
Sei $\omega \in \Lambda^n V^*$ und seien $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ und $(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)$ Basen in V. Sei $B = (B_{ij})$ die Übergangsmatrix zwischen diesen Basen, d.h. es gelte $a_j = \sum_i B_{ij} b_i$. Dann erhält man

$$\omega(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \det(B)\, \omega(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n).$$

Wir wollen nun diese alternierenden Multilinearformen auf Untermannigfaltigkeiten M übertragen. Dazu liegt es nahe, wie bei den Vektorfeldern und den Orientierungen, Familien von alternierenden Multilinearformen in den Tangentialräumen T_xM von M zu betrachten, die in einem noch zu präzisierenden Sinne glatt vom Fußpunkt x abhängen.

Definition. *Eine Familie $\{\omega_x\}_{x\in M}$ von k–Formen $\omega_x \in \Lambda^k T_x^*M$ heißt glatt, falls die Funktion*

$$x \in M \longrightarrow \omega_x(X_1(x), \ldots, X_k(x)) \in \mathbb{R}$$

glatt ist für alle Vektorfelder $X_1, \ldots X_k \in \mathfrak{X}(M)$.

Definition. *Eine Differentialform vom Grad k (kurz k–Form) auf einer Untermannigfaltigkeit M ist eine alternierende, $C^\infty(M)$–multilineare Abbildung auf $\mathfrak{X}(M)$, d.h. eine Abbildung*

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{k\text{–}mal} \longrightarrow C^\infty(M),$$

mit den Eigenschaften

1. ω ist additiv in jeder Komponente,

2. $\omega(X_1,\ldots,X_{i-1},fX_i,X_{i+1},\ldots,X_k) = f\omega(X_1,\ldots,X_k)$,
wobei $f \in C^\infty(M)$ und $X_1,\ldots,X_k \in \mathfrak{X}(M)$

3. $\omega(\ldots,X_i,\ldots,X_j,\ldots) = -\omega(\ldots,X_j,\ldots,X_i,\ldots)$ für alle $X_i, X_j \in \mathfrak{X}(M)$.

Den Raum aller k-Formen von M bezeichnen wir mit $\Omega^k(M)$. Außerdem setzen wir $\Omega^0(M) := C^\infty(M)$.

Bemerkung: $\Omega^k(M)$ ist ein Modul über dem Ring der glatten Funktionen $C^\infty(M)$.

Wir werden zeigen, dass die in den beiden vorstehenden Definitionen erklärten Begriffe "k-Form auf der Untermannigfaltigkeit M" und "glatten Familie von k-Formen in jedem Tangentialraum an M" zueinander äquivalent sind. Betrachten wir zunächst ein Beispiel:

Beispiel: Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf M. Wir betrachten die folgende 1-Form $df \in \Omega^1(M)$, die durch die Richtungsableitung von f nach Vektorfeldern definiert wird:

$$\begin{array}{rcl} df : \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ X & \mapsto & df(X) := X(f). \end{array}$$

Die 1-Form $df \in \Omega^1(M)$ heißt *Differential von f*.
Für jeden Punkt $x \in M$ haben wir andererseits das Differential von f im Punkt x, d.h. die Linearform $df_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$, also ein Element $df_x \in \Lambda^1 T_x^*M$. Die 1–Form df und die glatte Familie der 1–Formen $\{df_x\}_{x\in M}$ entsprechen sich wegen folgender Beziehung

$$(df(X))(x) := X(f)(x) = df_x(X(x)).$$

Dieser Zusammenhang gilt allgemein, wie aus dem folgenden Satz folgen wird.

Satz 9.20 (Lokalisierungssatz für k–Formen) *Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ eine k–Form auf M und $X_1,\ldots,X_k \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist der Wert $\omega(X_1,\ldots X_k)(x)$ in einem beliebigen Punkt $x \in M$ durch die Vektoren $X_1(x),\ldots X_k(x)$ in T_xM eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sei $x \in M$ ein beliebiger fixierter Punkt und $(U, \varphi = (x_1,\ldots,x_n))$ eine Karte um x mit der kanonischen Basis $(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n})$. Wir wählen eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ mit $f(x) = 1$ und dem Träger in U. Seien nun $X_1,\ldots,X_k$ und $\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_k$ zwei k-Tupel von Vektorfeldern auf M mit $X_i(x) = \tilde{X}_i(x)$ für jedes $i = 1,\ldots,k$. Wir wollen zeigen, daß dann

$$\omega(X_1,\ldots,X_k)(x) = \omega(\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_k)(x)$$

gilt. Wir betrachten dazu die folgenden, auf ganz M definierten Vektorfelder $Y_1,\ldots,Y_n$:

$$Y_i := \begin{cases} f \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} & \text{auf } U \\ 0 & \text{auf } M \setminus U \end{cases}$$

Da der Träger der Funktion f in U liegt, sind die Vektorfelder Y_i korrekt definiert. Die Vektorfelder fX_j bzw. $f\tilde{X}_j$ lassen sich dann in der folgenden Form darstellen

$$fX_j = \sum_{i=1}^n \xi_{ji} Y_i \qquad \text{und} \qquad f\tilde{X}_j = \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_{ji} Y_i,$$

wobei ξ_{ji} bzw. $\tilde{\xi}_{ji}$ glatte Funktionen auf M sind. Nach Voraussetzung ist $\xi_{ji}(x) = \tilde{\xi}_{ji}(x)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, k$. Nun folgt

$$\begin{aligned}
\omega(X_1, \ldots, X_k)(x) &= f^k(x) \cdot \omega(X_1, \ldots, X_k)(x) = \big((f^k\omega)(X_1, \ldots, X_k)\big)(x) \\
&= \omega(fX_1, \ldots, fX_k)(x) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \xi_{1i_1}(x) \cdot \ldots \cdot \xi_{ki_k}(x) \cdot \omega(Y_1, \ldots, Y_k)(x) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \tilde{\xi}_{1i_1}(x) \cdot \ldots \cdot \tilde{\xi}_{ki_k}(x) \cdot \omega(Y_1, \ldots, Y_k)(x) \\
&= \omega(f\tilde{X}_1, \ldots, f\tilde{X}_k)(x) = \ldots = \omega(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_k)(x).
\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von Satz 9.20 erhalten wir eine bijektive Beziehung zwischen dem Modul $\Omega^k(M)$ der k–Formen auf M und den glatten Familien von k–Formen $\{\omega_x\}_{x\in M}$ mit $\omega_x \in \Lambda^k T_x^* M$:

1. Ist $\omega \in \Omega^k(M)$ eine k-Form auf M, so definieren wir eine glatte Familie $\{\omega_x\}_{x\in M}$ von k–Formen $\omega_x \in \Lambda^k T_x^* M$ durch

   $$\omega_x(v_1, \ldots, v_k) := \omega(X_1, \ldots, X_k)(x)\ , \quad \text{wobei } X_i \in \mathfrak{X}(M) \text{ mit } X_i(x) = v_i \in T_xM$$

   Der vorstehende Satz besagt, daß $\omega_x(v_1, \ldots v_k)$ korrekt definiert ist, weil unabhängig von Wahl der Fortsetzung der Vektoren v_i durch die Vektorfelder X_i.

2. Sei andererseits $\{\omega_x\}_{x\in M}$ eine glatte Familie von k–Formen $\omega_x \in \Lambda^k T_x^* M$. Dann definieren wir eine k-Form $\omega \in \Omega^k(M)$ durch

   $$\omega(X_1, \ldots, X_k)(x) := \omega_x(X_1(x), \ldots, X_k(x))\ , \qquad X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M).$$

Definition. *Sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge, $\omega \in \Omega^k(M)$ eine k-Form und $\omega \widehat{=} \{\omega_x\}_{x\in M}$ die ω entsprechende glatte Familie. Unter der Einschränkung $\omega|_U \in \Omega^k(U)$ von ω auf U versteht man die k–Form, die der glatten Familie $\{\omega_x\}_{x\in U}$ entspricht.*

9.9.2 Rechenoperationen für Differentialformen

(1) Induzierte Formen.

Sei $F : M \longrightarrow N$ eine glatte-Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten. Man kann jede Differentialform auf der Bildmannigfaltigkeit N mittels F auf M "zurückziehen".
F induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} F^* : \Omega^k(N) &\longrightarrow \Omega^k(M), \\ \omega &\longmapsto F^*\omega \end{aligned}$$

die folgendermaßen definiert ist: Sei ω eine k-Form auf der Bildmannigfaltigkeit N. Wir definieren die *mittels F induzierte k–Form* $F^*\omega \in \Omega^k(M)$ durch die folgende glatte Familie von k-Formen $\{(F^*\omega)_x\}_{x\in M}$

$$(F^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_k) := \omega_{F(x)}(dF_x(v_1), \ldots, dF_x(v_k))\ , \qquad v_i \in T_xM\ .$$

Für Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k$ auf M gilt also

$$(F^*\omega)(X_1, \ldots, X_k)(x) := \omega_{F(x)}(dF_x(X_1(x)), \ldots, dF_x(X_k(x))).$$

Wir bemerken hier, dass für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ und eine surjektive glatte Abbildung $F : M \longrightarrow N$ durch die Familie von Vektoren $\{dF_x(X(x))\}_{x\in M}$ im allgemeinen kein Vektorfeld auf N definiert wird.

(2) Das alternierende Produkt.

Wie im Falle der Vektorräume kann man auch für Differentialformen eine Zuordnung definieren, die zwei Differentialformen ω und σ wieder eine Differentialform $\omega \wedge \sigma$, ihr sogenanntes *alternierendes Produkt* oder *wedge-Produkt* zuordnet:

$$\begin{aligned} \wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) &\longrightarrow \Omega^{k+l}(M) \\ (\omega, \sigma) &\longmapsto \omega \wedge \sigma \end{aligned}$$

Seien $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\sigma \in \Omega^l(M)$ mit $k, l > 0$. Dann ist $\omega \wedge \sigma \in \Omega^{k+l}(M)$ wie folgt definiert

$$(\omega \wedge \sigma)(X_1, \ldots, X_{k+l}) := \sum_{\substack{\pi \in S_{k+l}, \\ \pi(1) < \ldots < \pi(k), \\ \pi(k+1) < \ldots < \pi(k+l)}} \operatorname{sgn}(\pi)\, \omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}) \cdot \sigma(X_{\pi(k+1)}, \ldots, X_{\pi(k+l)}),$$

Für $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ und $\omega \in \Omega^k(M)$ setzen wir

$$f \wedge \omega = \omega \wedge f := f \cdot \omega.$$

Analog wie für das alternierende Produkt von Multilinearformen in Vektorräumen erhält man die folgenden Eigenschaften des alternierenden Produktes für Differentialformen, die wir dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Satz 9.21 *Das alternierende Produkt $\wedge$ von Differentialformen hat folgende Eigenschaften:*

1. *Sind $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\sigma \in \Omega^l(M)$, so ist $\omega \wedge \sigma \in \Omega^{k+l}(M)$.*
2. *$\wedge$ ist in jeder Komponente $C^\infty(M)$–linear.*
3. *$\wedge$ ist assoziativ.*
4. *Sind $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\sigma \in \Omega^l(M)$, so gilt $\omega \wedge \sigma = (-1)^{k \cdot l}(\sigma \wedge \omega)$.*
5. *Sei $F : M \longrightarrow N$ eine glatte Abbildung und $\omega \in \Omega^k(N)$ und $\sigma \in \Omega^l(N)$ zwei Differentialformen auf der Bildmannigfaltigkeit N. Dann gilt*

$$F^*(\omega \wedge \sigma) = (F^*\omega) \wedge (F^*\sigma).$$

□

(3) Das innere Produkt.

Sei X ein Vektorfeld auf M. Die Abbildung

$$\begin{aligned} i_X : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \\ \omega &\mapsto i_X\omega \end{aligned}$$

definiert durch

$$(i_X\omega)(X_1,\ldots,X_{k-1}) := \omega(X,X_1,\ldots,X_{k-1})$$

heißt *inneres Produkt von ω mit dem Vektorfeld X*. Der folgende Satz beschreibt einige Eigenschaften des inneren Produktes. Der Beweis wird durch formales Anwenden der Definitionen geführt (Übungsaufgabe).

Satz 9.22 (Eigenschaften des Inneren Produktes)

1. $i_{fX}\,\omega = i_X(f\,\omega) = f\cdot i_X\omega$,
2. $i_X(\omega\wedge\sigma) = (i_X\omega)\wedge\sigma + (-1)^{deg\,\omega}\omega\wedge(i_X\sigma)$,
3. *Sei $F : M \longrightarrow N$ eine glatte Abbildung, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$ zwei Vektorfelder, die durch F verknüpft sind, d.h. für die $Y(F(x)) = dF_x(X(x))$ für alle $x \in M$ gilt. Ist $\omega \in \Omega^k(N)$, so gilt*
$$F^*(i_Y\omega) = i_X(F^*\omega).$$

□

(4) Die lokale Darstellung einer Differentialform.

Sei $(U,\varphi = (x_1,\ldots,x_n))$ eine Karte um $x \in M$, $(\frac{\partial}{\partial x_1}(x),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}(x))$ die von dieser Karte definierte kanonische Basis in T_xM und $((dx_1)_x,\ldots,(dx_n)_x)$ die zugehörige duale Basis in T_x^*M. Dann sind $\frac{\partial}{\partial x_i}$ Vektorfelder auf dem Kartenbereich U, die Differentiale dx_i der Koordinatenfunktionen sind 1-Formen auf U.
Nach Definition gilt für das alternierende Produkt $dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$

$$(dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k})\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\Big) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_k \\ j_1,\ldots,j_k\end{pmatrix}, & \text{falls } \binom{I}{J} \in S_k \\ 0, & \text{falls } \binom{I}{J} \notin S_k \end{cases}.$$

Wie die Basisdarstellung einer k-Form in der Algebra erhält man die folgende Darstellung einer Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ über dem Kartenbereich U

$$\omega|_U = \sum_{I=(1\le i_1<\ldots<i_k\le n)} \omega_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k} =: \sum_I \omega_I dx^I, \qquad (*)$$

wobei die Funktionen $\omega_I := \omega_{i_1\ldots i_k} \in C^\infty(U)$ durch

$$\omega_{i_1\ldots i_k}(x) = \omega|_U\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\Big)(x) = \omega_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(x),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}(x)\Big)$$

gegeben sind.
Wir nennen (*) die *lokale Darstellung von ω bezüglich der Karte* $(U,\varphi = (x_1,\ldots,x_n))$.
Die Abbildungen

$$\omega_{i_1\ldots i_k}\circ(\varphi^{-1}) : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißen *lokale Koeffizienten der Form ω bezüglich* (U,φ).

Die bisherigen Rechenregeln waren algebraische Rechenregeln, d.h. Regeln, die punktweise gelten. Die folgenden beiden Operationen beschreiben Ableitungsregeln für Differentialformen.

(5) Das Differential einer k–Form.

In Abschnitt 11.9.1 haben wir bereits das Differential einer glatten Funktion definiert. Dies war die folgende Abbildung, die jeder Nullform (=Funktion) eine 1-Form zuordnet

$$\begin{aligned} d:\ C^\infty(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ f &\longmapsto df \qquad \text{wobei } df(X) := X(f) \end{aligned}$$

Die lokale Darstellung von df bezüglich einer Karte $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ ist gegeben durch

$$df = \sum_{i=1}^n df\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)\, dx^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(f)\, dx^i.$$

Wir definieren jetzt das Differential auf den k-Formen für $k \geq 1$, das jeder k-Form eine $(k+1)$-Form zuordnet. Die Abbildung

$$\begin{aligned} d:\ \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(M)\,, \\ \omega &\longmapsto d\omega \end{aligned}$$

sei definiert durch

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \ldots, X_k) := &\sum_{j=0}^k (-1)^j X_j\big(\omega(X_0, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_k)\big) \\ &+ \sum_{0 \leq \alpha < \beta \leq k} (-1)^{\alpha+\beta} \omega([X_\alpha, X_\beta], X_0, \ldots, \widehat{X}_\alpha, \ldots, \widehat{X}_\beta, \ldots, X_k). \end{aligned}$$

(Dabei bedeutet der "Hut" auf einem Eintrag X_i, d.h. $\widehat{X}_i$, dass das entsprechende Vektorfeld weggelassen wird.)
d heißt *Differential auf dem Raum der k–Formen*, $d\omega$ heißt *Differential von ω*.

Als Spezialfälle erhält man beispielsweise für das Differential von 1- bzw. 2-Formen

1. Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ eine 1-Form. Dann gilt

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

2. Sei $\omega \in \Omega^2(M)$ eine 2-Form. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) = &X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y) \\ &-\omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Satz 9.23 (Eigenschaften des Differentials)

1. *Die Abbildung $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ ist korrekt definiert und linear.*

2. *Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ und $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine Karte auf M bezüglich derer ω die lokale Darstellung $\omega|_U = \sum\limits_I \omega_I dx^I$ habe. Dann gilt für die lokale Darstellung von $d\omega$*

$$d\omega|_U = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I\,.$$

3. *$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^{deg\,\omega} \omega \wedge d\sigma$.*

4. $dd\omega = 0$ *für alle* $\omega \in \Omega^k(M)$ *und* $k \geq 0$.

5. Ist $F : M \longrightarrow N$ *eine glatte Abbildung und* $\omega \in \Omega^k(N)$*, dann gilt*

$$d(F^*\omega) = F^* d\omega.$$

Beweis: Zu 1.) Nach Definition ist d offensichtlich linear. Die Schiefsymmetrie von $d\omega$ folgt aus der Schiefsymmetrie der k-Form ω bzw. des Kommutators $[\cdot,\cdot]$. Die C^∞–Linearität von $d\omega$ folgt aus den Rechenregeln für den Kommutator aus Satz 9.13. Man benutzt dazu z.B. die Regel $[fX, Y] = f[X,Y] - Y(f)X$. Also ist $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$.
Zu 2.) Die k-Form ω habe die lokale Darstellung

$$\omega|_U = \sum_I \omega_I dx^I.$$

Nach 1.) ist $d\omega$ eine $(k+1)$-Form, besitzt also eine lokale Darstellung der Form

$$\begin{aligned} d\omega|_U &= \sum_{(J=1 \leq j_0 < \ldots < j_k \leq n)} (d\omega)\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_0}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\Big) \cdot dx^J \\ &\overset{Def.}{=} \sum_J \Big[\sum_{\alpha=0}^{k} (-1)^\alpha \frac{\partial}{\partial x_{j_\alpha}} \Big(\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_0}}, \ldots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x_{j_\alpha}}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\Big)\Big)\Big] \cdot dx^J \ + \ 0, \end{aligned}$$

wobei $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ benutzt wurde. Es folgt durch Vertauschen der Differentiale

$$\begin{aligned} d\omega|_U &= \sum_{J=(I,j_\alpha)} \Big[\sum_{\alpha=0}^{k} \Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_\alpha}}(\omega_I)\Big)\Big] \cdot dx_{j_\alpha} \wedge dx^I = \sum_I \Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_I) \cdot dx_j\Big] \wedge dx^I \\ &= \sum_I d\omega_I \wedge dx^I. \end{aligned}$$

Zu 3.) Wir dürfen oBdA $\omega = f\, dx^I$ und $\sigma = g\, dx^J$ annehmen, da d linear und eine lokale Operation ist. Dann folgt durch die bereits bekannten Rechenregln für Differentialformen

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= d(f\, dx^I \wedge g\, dx^J) = d(fg\, dx^I \wedge dx^J) \overset{2.}{=} d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &\overset{PR}{=} (g\, df + f\, dg) \wedge dx^I \wedge dx^J \overset{9.21}{=} df \wedge dx^I \wedge g\, dx^J + dg \wedge f\, dx^I \wedge dx^J \\ &= df \wedge dx^I \wedge \sigma + dg \wedge \omega \wedge dx^J \overset{2.}{=} (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^{deg\omega} \omega \wedge d\sigma. \end{aligned}$$

Zu 4.) Wir beweisen die Behauptung zunächst für $k = 0$. Sei dazu $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt nach Definition des Differentials und unter Benutzung der Eigenschaften des Kommutators aus Satz 9.13

$$d(df)(X,Y) \overset{Def.}{=} X(df(Y)) - Y(df(X)) - df([X,Y]) = X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X,Y](f) \ = \ 0.$$

Sei nun $k \geq 1$ und $\omega \in \Omega^k(M)$ eine k-Form mit der lokaler Darstellung $\omega = \sum\limits_I \omega_I dx^I$. Dann gilt

$$d(d\omega) \overset{2.}{=} \sum_I d(d\omega^I \wedge dx^I) = \sum_I [d(d\omega^I) \wedge dx^I - d\omega_I \wedge d(dx^I)].$$

Da $\omega^I \in C^\infty(M)$ und $dx^I = dx_{i_k} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ ist, folgt $d(d\omega) = 0$ aus dem Fall $k = 0$ und unter Anwendung von 3.).

Zu 5.) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über den Grad von ω. Sei $k = 0$ und $f \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$. Dann gilt $(F^*f)(x) = f(F(x))$. Also folgt

$$d(F^*f)_x(v) = d(f \circ F)_x(v) \overset{KR}{=} (df)_{F(x)}\big(dF_x)(v)\big) = (F^*df)_x(v),$$

d.h. $d(F^*f) = F^*df$.
Wir setzen nun voraus, dass die Behauptung bereits für k-Formen bewiesen ist und schließen auf $(k+1)$-Formen. Sei also ω eine $(k+1)$-Form. Wie oben dürfen wir oBdA annehmen, daß $\omega = f dx^J$ gilt, wobei J ein geordneter Multiindex $J = (1 \leq j_0 < \ldots < j_k \leq n)$ ist. In der folgenden Rechnung bezeichnet I den Multiindex $I = (j_0 < \ldots < j_{k-1})$. Dann erhalten wir aus den schon bekannten Rechenregeln und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
d(F^*\omega) &= d(F^*(f dx^J)) = d(F^*[(f dx_{j_0} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}}) \wedge dx_{j_k}]) \\
&\overset{9.21}{=} d(F^*(f dx^I) \wedge F^* dx_{j_k}) \\
&\overset{3.}{=} d(F^*(f dx^I)) \wedge F^* dx_{j_k} + (-1)^k F^*(f dx^I) \wedge d(F^* dx_{j_k}) \\
&\overset{I.Vor.}{=} F^*(d(f dx^I)) \wedge F^* dx_{j_k} + (-1)^k F^*(f dx^I) \wedge (ddF^* x_{j_k}) \\
&\overset{\substack{4.\& \\ 9.21}}{=} F^*(d(f dx^I) \wedge dx_{j_k}) \overset{3.}{=} F^*(d(f dx^I \wedge dx_{j_k})) = F^* d\omega.
\end{aligned}$$

□

Definition. *Eine k–Form $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt geschlossen, wenn $d\omega = 0$. Eine k–Form $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt exakt, wenn eine $(k-1)$–Form $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ existiert, so daß $d\eta = \omega$.*

Beispiel: Wir betrachten die folgende 1–Form ω auf $M = \mathbb{R}^2$ (in Euklidischen Koordinaten)

$$\omega = y\,dx + x\,dy.$$

1. ω ist geschlossen, da

$$d\omega = dy \wedge dx + dx \wedge dy = -dx \wedge dy + dx \wedge dy = 0.$$

2. ω ist exakt, da für die Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $f(x,y) := x \cdot y$ gilt

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = y\,dx + x\,dy = \omega.$$

Da $d \circ d = 0$, ist jede exakte Differentialform geschlossen. Für bestimmte Sorten von Mannigfaltigkeiten gilt auch die Umkehrung, z.B. für sternförmige offene Mengen im $\mathbb{R}^n$.
Zur Erinnerung: Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig (bzgl. $x_0 \in U$), falls für alle $x \in U$ die Strecke $\overline{x_0 x}$ vollständig in U liegt.

Lemma von Poincare:
Auf einer offenen und sternförmigen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist jede geschlossene k-Form $(k \geq 1)$ exakt.

Beweis: Wir geben hier einen direkten Beweis an, der auch das Rechnen mit Differentialformen demonstrieren soll. Wir führen den Beweis in 2. Schritten. Im ersten Schritt werden wir zeigen, dass es ausreicht, die Behauptung für offene und bzgl. dem Nullvektor $o \in \mathbb{R}^n$ sternörmige Mengen zu zeigen. Im zweiten Schritt zeigen wir das Lemma von Poincare dann für geschlossene $k-$Formen auf offenen und bzgl. o sternförmigen Mengen.

1. Schritt: Angenommen die Behauptung des Lemmas von Poincare gilt für jede offene, bzgl. o sternförmige Menge im $\mathbb{R}^n$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offen und sternförmig Menge. U sei sternförmig bezüglich $x_0 \in U$. Wir betrachten dann die offene und bzgl. o sternförmige Menge

$$\tilde{U} := U - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Sei nun $\omega \in \Omega^k(U)$ geschlossen, d.h. es gelte $d\omega = 0$. Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \phi : \tilde{U} &\to U \\ x &\longmapsto x + x_0 \end{aligned}$$

und ziehen ω mittels ϕ zurück. Dann gilt $\phi^*\omega \in \Omega^k(\tilde{U})$ und $d(\phi^*\omega) = \phi^* d\omega = 0$. Entsprechend unserer Annahme existiert dann eine $(k-1)-$Form $\tilde{\eta} \in \Omega^{k-1}(\tilde{U})$ mit

$$d\tilde{\eta} = \phi^*\omega.$$

Für die Umkehrabbildung ϕ^{-1} und die dadurch induzierte Form $\eta := (\phi^{-1})^*\tilde{\eta} \in \Omega^{k-1}(U)$ gilt dann:

$$d\eta = d((\phi^{-1})^*\tilde{\eta}) = (\phi^{-1})^* d\tilde{\eta} = (\phi^{-1})^*(\phi^*\omega) = (\phi^{-1})^* \circ \phi^*\omega = \omega.$$

Also ist ω exakt auf U. Daher genügt es, die Behauptung des Lemmas von Poincare für offene Mengen des $\mathbb{R}^n$ zu zeigen, die den Nullvektor o enthalten und sternförmig bzgl. o sind.

2. Schritt: Sei nun $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die den Nullvektor o enthält und sternförmig bezüglich o ist. Zum Beweis der Behauptung im Lemma von Poincare definieren wir für jede Stufe $k \geq 1$ einen linearen Operator

$$S_k : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k-1}(U)$$

und zeigen, dass für jede k-Form ω die Formel

$$\omega = S_{k+1}(d\omega) + dS_k(\omega)$$

gilt. Ist ω insbesondere geschlossen, d.h. $d\omega = 0$, so folgt für die $(k-1)$-Form $\eta := S_k(\omega)$, dass $d\eta = \omega$ gilt, und somit das Lemma von Poincare.

Sei ω eine k-Form auf U. Wir stellen ω in den Euklidischen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ dar

$$\omega = \sum_{I := (1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n)} \omega_I \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

wobei

$$\omega_I = \omega_{|U}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right) \in C^\infty(U).$$

Wir definieren die $(k-1)-$Form $S_k(\omega) \in \Omega^{k-1}(U)$ mittels der Koeffizienten ω_I von ω durch

$$S_k(\omega)_x := \sum_I \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \underbrace{\left(\int_0^1 t^{k-1}\omega_I(tx)dt\right) x_{i_\alpha}}_{=:\theta(x) \in C^\infty} \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Da U sternförmig bezüglich o ist, ist $\omega_I(tx)$ für alle $t \in [0,1]$ definiert und damit auch die Form $S_k(\omega)$ korrekt gegeben. Offensichlich ist die Zuorndung $\omega \mapsto S_k(\omega)$ linear.

Für das Differential von $S_k(\omega)$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
d\,S_k(\omega)_x := & \sum_I \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}(x) dx_j \right)}_{=d\theta} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_I \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_I(tx) dt \cdot x_{i_\alpha} \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&\overset{PR}{=} \sum_I \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx) dt \right) \cdot x_{i_\alpha} \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad + \sum_I \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \cdot \sum_{\beta=1}^{k} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_I(tx) dt \right) \cdot dx_{i_\beta} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_I \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx)\, dt \right) \cdot x_{i_\alpha} \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad + \sum_I \left(\int_0^1 k \cdot t^{k-1} \omega_I(tx) dt \right) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.
\end{aligned}
$$

Für das Differentail von ω gilt

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \sum_I d\omega_I \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_I \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j} \cdot dx_j}_{d\omega_I} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}
\end{aligned}
$$

Wir ordnen nun der $(k+1)$-Form $d\omega$ durch die gleiche Prozedur wie oben die k-Form $S_{k+1}(d\omega)$ auf U zu und erhalten:

$$
\begin{aligned}
S_{k+1}(d\omega)_x = & \sum_I \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx)\, dt \right) x_j\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} - \\
& - \sum_I \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx)\, dt \right) x_{i_\alpha}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}
\end{aligned}
$$

Durch Addition der Formeln für $d\,S_k(\omega)$ und $S_{k+1}(d\omega)$ folgt bei Benutzung der Kettenregel:

$$
\begin{aligned}
dS_k(\omega) + S_{k+1}(d\omega) &= \sum_I \left(\int_0^1 k \cdot t^{k-1} \omega_I(tx) dt \right) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad + \sum_I \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx)\, dt \right) x_j\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_I \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \left(t^k \omega_I(tx) \right) dt \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_I \omega_I(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&= \omega.
\end{aligned}
$$

□

Im allgemeinen sind die exakten Differentialformen ein echter Unterraum der geschlossenen Differentialformen:

$$\text{Im } d_{k-1} := d\left(\Omega^{k-1}(M)\right) \subset \text{ Ker } d_k := \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\}.$$

Der Faktorraum

$$H^k_{DR}(M) := \text{Ker } d_k / \text{Im } d_{k-1}$$

heißt *k.- deRham-Kohomologiegruppe von M*. Für offene und sternförmige Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ gilt nach dem Lemma von Poincare

$$H^k_{DR}(U) = 0 \qquad\qquad \text{für alle } k \geq 1.$$

Die DeRham-Kohomologie und ihre Anwendungen in der Analysis und Geometrie werden im Hauptstudium in Vorlesungen über Algebraische Geometrie, Differentialgeometrie bzw. Globale Analysis behandelt. Sie enthalten wesentliche Informationen über analytische Eigenschaften der Mannigfaltigkeit M. Wir haben in Kapitel 8 bereits gezeigt, wie man durch Kenntnis der DeRham-Kohomologie der Sphäre und der Kugel den Brouwerschen Fixpunktsatz beweisen kann (siehe Kapitel 8.3.1.2). Wir erwähnen hier ausblickend zwei weitere Anwendungen:
Man kann zeigen, dass die Vektorräume $H^k_{DR}(M)$ für kompakte Mannigfaltigkeiten M endlich-dimensional sind. Deshalb kann man kompakten, n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten die folgende Zahl, die sogenannte *Eulersche Charakteristik*, zuordnen:

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k_{DR}(M).$$

Es gilt z.B.

1. Zwei kompakte, orientierbare, zusammenhängende 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind genau dann diffeomeomorph, wenn ihre Eulersche Charakteristik übereinstimmt.

2. Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M^n existiert genau dann ein globales Vektorfeld ohne Nullstellen, wenn die Eulersche Charakteristik verschwindet: $\chi(M) = 0$.

Ein weiterer wichtiger Ableitungsbegriff für Differentialformen ist die Lie-Ableitung, die die Richtungsableitung von Funktionen (0-Formen) verallgemeinert.

(6) Die Lie–Ableitung einer Differentialform

Sei X ein Vektorfeld auf M. Die Abbildung

$$\begin{aligned} L_X : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^k(M) \\ \omega &\longmapsto L_X\omega \end{aligned}$$

definiert durch

$$L_X\omega := d\, i_X\omega + i_X d\omega$$

heißt *Lie–Ableitung von ω nach dem Vektorfeld X.*

Satz 9.24 *Die Lie–Ableitung hat folgende Eigenschaften:*

1. *Für beliebige Vektorfelder* $X_1, \ldots, X_k$ *auf* M *gilt die folgende Formel zur Berechnung der Lie-Ableitung*

$$\begin{aligned}(L_X\omega)(X_1, \ldots, X_k) = {} & X(\omega(X_1, \ldots, X_k)) \\ & - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \ldots, X_k).\end{aligned}$$

2. $L_X(\omega \wedge \sigma) = (L_X\omega) \wedge \sigma + \omega \wedge L_X\sigma$.

3. $d \circ L_X = L_X \circ d$.

4. $L_{fX} = fL_X + (df) \wedge i_X$.

5. $[L_X, i_Y] := L_X \circ i_Y - i_Y \circ L_X = i_{[X,Y]}$
   $[L_X, L_Y] := L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X,Y]}$.

6. *Sei* $F : M \longrightarrow N$ *eine glatte Abbildung,* $\omega \in \Omega^k(N)$*, und seien* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *und* $Y \in \mathfrak{X}(N)$ *zwei durch* F *verknüpfte Vektorfelder, d.h. es gelte*

$$dF_x(X(x)) = Y(F(x)) \qquad \forall\, x \in M.$$

   Dann gilt

$$L_X(F^*\omega) = F^*\big(L_Y\omega\big).$$

Beweis: Dies beweist man durch formales Abspulen der Definitionen (Übungsaufgabe). □

9.9.3 Die Volumenform einer orientierten Untermannigfaltigkeit

Wie wir in Abschnitt 11.6 gesehen haben, unterscheidet man orientierbare und nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten. Wir charakterisieren zunächst die orientierbaren Mannigfaltigkeiten mittels Diffentialformen.

Satz 9.25 *Eine* n*–dimensionale Untermannigfaltigkeit* $M \subset \mathbb{R}^N$ *ist genau dann orientierbar, wenn eine nirgens verschwindende* n*–Form* $\omega \in \Omega^n(M)$ *existiert, d.h. eine n-Form mit* $\omega_x \neq 0$ *für alle* $x \in M$.

Beweis: ($\Longrightarrow$): Sei M orientiert. Wir betrachten eine positiv orientierte Karte $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ auf M mit der kanonischen Basis $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y)\right) \in \mathcal{O}_{T_yM}$ für alle $y \in U$. Wenden wir das Gram–Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf diese Basis in jedem der Euklidischen Vektorräume (T_yM, g_y) an, so erhalten wir eine positiv orientierte orthonormale Basis $(e_1(y), \ldots, e_n(y))$ in T_yM. Die durch die Zuordnung $e_i : y \in U \longrightarrow e_i(y) \in \mathbb{R}^N$ definierten Abbildungen auf dem Kartenbereich U sind glatt, also Vektorfelder auf U. Dann definieren wir die gesuchte Form ω lokal auf U durch

$$\omega|_U(e_1, \ldots, e_n) := 1.$$

Offensichtlich ist $\omega_y \neq 0$ für $y \in U$. Bleibt zu zeigen, daß ω auf ganz M korrekt definiert ist. Für je zwei Basen $\underline{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ und $\underline{\mathfrak{b}} = (\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)$ in T_yM gilt

$$\omega_y(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \det(M_{\underline{\mathfrak{a}}\,\underline{\mathfrak{b}}})\omega_y(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n),$$

wobei $M_{\underline{\mathfrak{a}}\,\underline{\mathfrak{b}}}$ die Übergangsmatrix zwischen den Basen bezeichnet. Für zwei positiv orientierte orthonormale Basen $\underline{\mathfrak{a}}$ und $\underline{\mathfrak{b}}$ ist folglich $\omega_y(\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n) = \omega_y(\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n)$, da die Determinante der Übergangsmatrix zwischen zwei gleichorientierten orthonormalen Basen 1 ist. Somit ist ω_y unabhängig von der gewählten positiv orientierten Karte um y definiert. Damit definiert $\omega = \{\omega_y\}_{y\in M}$ eine globale, nirgends verschwindende n-Form auf M.

($\Longleftarrow$): Sei nun umgekehrt ω eine irgends verschwindende n-Form auf M. Wir definieren eine Orientierung auf M durch

$$(\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n) \in \mathcal{O}_{T_xM} :\iff \omega_x(\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n) > 0\,.$$

Sei $x \in M$ und $(U,\varphi = (x_1,\ldots,x_n))$ eine Karte um x mit zusammenhängendem Kartenbereich U. Gilt für die kanonische Basis dieser Karte $(\frac{\partial}{\partial x_1}(x),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}(x)) \in \mathcal{O}_{T_xM}$, so ist aus Stetigkeitsgründen auch $(\frac{\partial}{\partial x_1}(y),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}(y)) \in \mathcal{O}_{T_yM}$ für alle $y \in U$. Das heißt die Karte (U,φ) ist positiv orientiert. Falls $(\frac{\partial}{\partial x_1}(x),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}(x)) \notin \mathcal{O}_{T_xM}$, so betrachten wir anstelle der Kartenabbildung $\varphi = (x_1,\ldots,x_n)$ die abgeänderte Kartenabbildung $\widehat{\varphi} = (-x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und erhalten ebenfalls eine positiv orientierte Karte $(U,\widehat{\varphi})$. □

Wir betrachten nun auf einer orientierten Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine bestimmte nichtverschwindende Form, die *Volumenform von* $(M^n,\mathcal{O}_{M^n})$. Sei $(M^n,\mathcal{O}_{M^n})$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit. Dann ist $(T_xM,g_x,\mathcal{O}_{T_xM})$ ein orientierter, euklidischer Vektorraum. Wir identifizieren diesen Vektorraum isometrisch mit dem $(\mathbb{R}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$, indem wir jedem Vektor $v \in T_xM$ seine Komponenten bzgl. einer fixierten positiv-orientierten orthonormalen Basis $e = (e_1,\ldots,e_n)$ zuordnen:

$$\begin{aligned} \tau_e : T_xM &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto \big(g_x(v,e_1),\ldots,g_x(v,e_n)\big)^t \end{aligned}$$

Definition. *Die n–Form $dM_x \in \Lambda^n T_x^*M$ sei definiert durch*

$$\begin{aligned} dM_x(v_1,\ldots,v_n) :=\ & \textit{Volumen des von den Vektoren } \tau_e(v_1),\ldots\tau_e(v_n) \textit{ im } \mathbb{R}^n \textit{ aufgespannten} \\ & \textit{Parallelepipedes } P = \Big\{ \sum_{i=1}^n x_i\tau_e(v_i) \;\Big|\; 0 \le x_i \le 1 \Big\} \\ =\ & \det\big(\,g_x(v_i,e_j)\,\big)_{ij} \\ =\ & \det\big(\tau_e(v_1)\cdots\tau_e(v_n)\big) \end{aligned}$$

dM_x heißt Volumenform von $(T_xM,g_x,\mathcal{O}_{T_xM})$.

Bemerkungen:

(1) dM_x ist korrekt definiert, d.h. unabhängig von der Wahl der orthonormalen Basis $(e_1,\ldots,e_n)$.

(2) Die Familie der n–Formen $\{dM_x\}_{x\in M}$ ist glatt, d.h. sie definiert eine n–Form auf M. Um dies einzusehen, betrachten wir wie im Beweis von Satz 9.25 ein lokales Feld von positiv orientierten orthonormalen Basen auf einem Kartenbereich U und bemerken, dass für alle glatten Vektorfelder $X_1,\ldots,X_n$ die Abbildung

$$x \in U \longrightarrow dM_x\big(X_1(x),\ldots,X_n(x)\big) = \det\big(g_x(X_i(x),e_j(x))\big)_{ij}$$

glatt ist. Die n-Form $dM := \{dM_x\}_{x\in M}$ heißt *Volumenform der orientierten Untermannigfaltigkeit* $(M,\mathcal{O}_M)$.

(3) Es sei $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ eine beliebige positiv orientierte Basis in $(T_xM, \mathcal{O}_{T_xM})$. Dann gilt

$$dM_x(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \sqrt{\det\big(g_x(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j)\big)_{ij}} \qquad (*).$$

Um dies einzusehen, bemerken wir, dass gemäß der Definition gilt

$$dM_x(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \det(\langle \mathfrak{a}_i, e_j \rangle) = \det(M_{(\mathfrak{a}_i),(e_i)}) > 0,$$

wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine positiv orientierte orthonormale Basis ist. Für (3) genügt es also zu zeigen, daß

$$\Big(\det\big(\langle\langle \mathfrak{a}_i, e_j \rangle\rangle\big)\Big)^2 = \det\big(\langle a_i, a_j \rangle\big).$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned}\Big(\det(\langle a_i, e_j \rangle)\Big)^2 &= \det(\langle a_i, e_j \rangle) \cdot \det(\langle a_i, e_j \rangle)^T = \det\big((\langle a_i, e_j \rangle)_{ij} \circ (\langle e_l, a_k \rangle)_{lk}\big) \\ &= \det\Big(\sum_{j=1}^{n} \langle a_i, e_j \rangle \langle e_j, a_k \rangle\Big)_{ik} = \det\Big(\langle a_i, \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, a_k \rangle e_j \rangle\Big)_{ik} = \det\big(\langle a_i, a_k \rangle\big).\end{aligned}$$

Sei $(\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$ die duale Basis zu $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$. Man erhält aus (*) insbesondere die folgende Basisdarstellung der n-Form dM_x:

$$dM_x = \sqrt{\det\big(\langle \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j \rangle\big)}\ \sigma^1 \wedge \ldots \wedge \sigma^n \qquad (**)$$

(4) Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ eine beliebige n-Form auf M^n. Dann existiert eine Funktion $f \in C^\infty(M)$, so daß $\omega = f \cdot dM$.
Wir definieren die Funktion f nämlich durch $f(x) = \omega_x(e_1, \ldots, e_n)$, wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine positiv orientierte orthonormale Basis ist.

Als Spezielfall von (**) erhält man die lokale Darstellung der Volumenform bzgl. einer positiv orientierten Karte auf M:

Satz 9.26 (Lokale Darstellung der Volumenform) *Sei $(M, \mathcal{O}_M)$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine positiv orientierte Karte auf M und $\Big(g_{ij} := \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle\Big)$ die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik bezüglich dieser Karte. Dann gilt*

$$dM|_U = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Beweis: Dies folgt, da die Differentiale $(dx_1, \ldots, dx_n)$ der Koordinatenfunktionen die duale Basis zur kanonischen Basis der Karte (U, φ) sind. □

Beispiel 1: Die Volumenform von $\mathbb{R}^n$
In Euklidischen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ des $\mathbb{R}^n$ gilt: $d\mathbb{R}^n = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Beispiel 2: Die Volumenform einer 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$
Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ (dh. eine Kurve). Dann gibt es um jeden Punkt $x \in M$ eine lokale Parametrisierung, die durch eine reguläre Kurve

$$\gamma : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^N \quad , \quad \gamma(0) = x$$

gegeben ist. Für die Volumenform in dieser Parametrisierung gilt

$$dM|_{\gamma(t)} = \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

In der "klassischen" Literatur heißt $dM|_{\gamma(I)}$ das Bogenelement der Kurve.

Beispiel 3: Die Volumenform von Flächen im $\mathbb{R}^3$
Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ und $\Phi : U \subset R^2 \longrightarrow M$ eine lokale Parametrisierung von M. Dann wird oft die folgende klassische Schreibweise benutzt

$$E := g_{11} = \Big\langle \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} \Big\rangle \quad , \quad F := g_{22} = \Big\langle \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} \Big\rangle \quad \text{und} \quad G := g_{12} = \Big\langle \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} \Big\rangle.$$

Damit erhält man

$$\theta := \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E & G \\ G & F \end{pmatrix} = EF - G^2 = \Big\| \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} \Big\|^2$$

und folglich ist

$$dM^2_{\Phi(U)} = \sqrt{EF - G^2}\; du_1 \wedge du_2 = \Big\| \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} \Big\| \; du_1 \wedge du_2.$$

In der "klassischen" Literatur nennt man die Volumenform $dM^2_{\Phi(U)}$ auch das "Oberflächenelement der Fläche".

Für die Lie-Ableitung der Volumenform nach einem Vektorfeld X erhält man die folgende Formel, die für die Integralsätze wichtig werden wird. Mit ihrer Hilfe kann man die Divergenz von eines Vektorfeldes X geometrisch als Volumenverzerrung beim Fluß entlang der Integralkurven von X interpretieren.

Satz 9.27 *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit und sei X ein Vektorfeld auf M. Dann gilt für die Lieableitung der Volumenform nach X*

$$L_X dM = \operatorname{div}(X)\, dM.$$

Beweis: Da keine nichttriviale $(n+1)$–Form auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit existiert ist das Differential der Volumenform Null: $ddM = 0$. Wegen $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ folgt somit $L_X dM = d(i_X dM)$. Um $d(i_X dM)$ zu berechnen, drücken wir dM und X in lokalen Koordinaten bzgl. einer positiv orientierten Karte aus:

$$dM = \sqrt{\theta}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \quad \text{und} \quad X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Dann ist

$$i_X dM = \sum_{i=1}^n \sqrt{\theta}\xi^i\, i_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sqrt{\theta}\, \xi^i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} d(i_X dM) &= \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i-j} \frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{\theta}\xi^i)\, \underbrace{dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n}_{=0,\ \text{wenn}\ i \neq j} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{\theta}\xi^i)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{\theta}\xi^i)\, dM = \operatorname{div}(X)\, dM. \end{aligned}$$

□

Abschließend untersuchen wir zur Vorbereitung auf die Integralsätze noch den Zusammenhang zwischen der Volumenform einer orientierten Mannigfaltigkeit mit Rand und der Volumenform des Randes. Zu diesem Zwecke müssen wir festlegen, welche Orientierung wir auf dem Rand wählen wollen.
Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine n-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$. ∂M ist eine $(n-1)$–dimensionale Untermannigfaltigkeit und für einen Randpunkt $x \in \partial M$ ist der Tangentialraum $T_x\partial M$ von ∂M im Punkt x ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum des n-dimensionalen Tangentialraumes T_xM.

Definition. *Die Abbildung* $x \in \partial M \longrightarrow \nu(x) \in T_xM \subset \mathbb{R}^N$ *mit*

1. $\nu(x) \perp_{\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathbb{R}^N}} T_x(\partial M)$,
2. $\|\nu(x)\| = 1$,
3. *es existiert eine Kurve* $\gamma : (-\varepsilon, 0] \longrightarrow M$ *mit* $\gamma(0) = x$ *und* $\gamma'(0) = \nu(x)$

heißt Vektorfeld der äußeren Normalen auf dem Rand ∂M.

Definition. *Sei* $(M, \mathcal{O}_M)$ *eine orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand* $\partial M \neq \emptyset$ *und* $\nu : \partial M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *das Vektorfeld der äußeren Normalen des Randes. Wir definieren eine Orientierung* $\mathcal{O}_{\partial M}$ *auf dem Rand durch*

$$(v_1, \ldots, v_{n-1}) \in \mathcal{O}_{T_x(\partial M)} \iff (\nu(x), v_1, \ldots, v_{n-1}) \in \mathcal{O}_{T_xM}.$$

$\mathcal{O}_{\partial M}$ *heißt die durch* $\mathcal{O}_M$ *induzierte Orientierung.*

Satz 9.28 *Sei* $(M, \mathcal{O}_M)$ *eine orientierte* n*–dimensionale Untermannigfaltigkeit im* $\mathbb{R}^N$ *mit Rand* $\partial M \neq \emptyset$*. Bezeichne* $\nu : \partial M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *das Vektorfeld der äußeren Normalen und* $\mathcal{O}_{\partial M}$ *die induzierte Orientierung auf* ∂M*. Dann gilt für die Volumenformen*

$$d(\partial M) = i_\nu \, dM \,|_{\partial M} \in \Omega^{n-1}(\partial M).$$

Beweis: Sei $x \in \partial M$ und $(e_1(x), \ldots, e_{n-1}(x))$ eine positiv orientierte orthonormale Basis in $T_x(\partial M)$. Dann ist $(\nu(x), e_1(x), \ldots, e_{n-1}(x))$ eine positiv orientierte orthonormale Basis in T_xM und es folgt aus der Definition der Volumenform

$$d(\partial M)_x(e_1, \ldots, e_{n-1}) = 1 = (dM)_x(\nu(x), e_1, \ldots, e_{n-1}) = i_{\nu(x)} dM_x(e_1, \ldots, e_{n-1}),$$

also ist $d(\partial M)_x = i_{\nu(x)} dM_x$. □

9.10 Integration von Formen über orientierten Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir eine Integrationstheorie für orientierte Mannigfaltigkeiten M behandeln, die Differentialformen zur Konstruktion der Maße benutzt. Dies soll die klassischen Maße (Bogenlänge von Kurven, Oberflächenmaß von gekrümmten Flächen, Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$) als Spezialfall umfassen.
Sei also M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit und ω eine n-Form auf M mit noch zu präzisierenden "guten" Eigenschaften. Wir werden einen Maßraum $(M, \mathcal{L}(M), \mu_\omega)$ auf der Grundmenge M definieren, wobei $\mathcal{L}(M)$ eine σ-Algebra von meßbaren Teilmengen von M und $\mu_\omega : \mathcal{L}(M) \longrightarrow [0, \infty]$ ein Maß auf dieser σ-Algebra ist, das von ω abhängt. Benutzen wir dann für ω die Volumenform dM, so ergibt sich die klassische Bogenlänge von Kurven, das klassische Oberflächenmaß für gekrümmte Flächen bzw. das Lebesgue-Maß für $M = \mathbb{R}^n$.

9.10.1 Meßbare Teilmengen von Untermannigfaltigkeiten

Um ein Maß für eine möglichst große Menge von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zu erhalten, das die Vorstellung vom geometrischen Volumen dieser Teilmengen modelliert, haben wir in Kapitel 10 das Lebesgue-Maß definiert. Wir wissen also, was eine Lebesgue-meßbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Wir übertragen diesen Begriff jetzt durch die Kartenabbildungen auf Mannigfaltigkeiten.

Definition. *Sei M^n eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt meßbar (bzw. Nullmenge), wenn für jede Karte (U, φ) von M die Menge $\varphi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue–meßbar (bzw. eine Lebesguesche Nullmenge) ist.*
Mit $\mathcal{L}(M)$ bezeichnen wir die Menge aller messbaren Teilmengen von M.

Bemerkung: Zum Nachweis der Meßbarkeit einer Teilmenge $A \subset M$ muß man die Lebesgue-Meßbarkeit der Mengen $\varphi(A \cap U)$ nicht für alle Karten (U, φ) von M überprüfen, sondern kann sich auf die Karten eines beliebig fixierten Atlas von M beschränken. Das gleiche gilt für die Nullmengen. Dies folgt, da Lebesgue–meßbare Mengen und Lebesguesche Nullmengen im $\mathbb{R}^n$ unter C^1–Abbildungen in ebensolche übergehen und da die Kartenübergange zwischen zwei Karten der Mannigfaltigkeit M mindestens von der Klasse C^1 sind.
Aus der Definition folgt unmittelbar

Satz 9.29 *$\mathcal{L}(M)$ ist eine σ-Algebra auf M.*

9.10.2 Das Integral einer Differentialform

Sei ω eine n-Form auf einer n-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M und $A \subset M$ eine meßbare Menge. Wir wollen das Integral

$$\int_A \omega$$

von ω über A definieren.
Im folgenden bezeichne

$$\omega|_U = \omega_\varphi \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \qquad \text{mit} \quad \omega_\varphi(x) := \omega_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)\Big)$$

die lokale Darstellung von ω bzgl. einer Karte $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$. Die Kartendarstellung der Koordinatenfunktion, d.h. die Funktion $\omega_\varphi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine glatte Funktion auf dem Koordinatenbereich $\varphi(U)$. Diese Funktion ist folglich Lebesgue-meßbar und Lebesgue-integrierbar, falls $\varphi(U)$ beschränkt oder falls der Träger von ω_φ kompakt ist. In diesem Fall existiert das Lebesgue-Integral

$$\int\limits_{\varphi(U\cap A)} \omega_\varphi \circ \varphi^{-1} d\lambda_n \qquad (*)$$

Möchte man nun ein Integral von ω über die Menge A definieren, so könnte man so vorgehen:
Man zerlegt A in "kleine" Teilmengen, die jeweils in einem Kartenbereich enthalten sind, betrachtet für diese kleinen Teimengen die Lebesgue-Integrale (*) und addiert diese. Im folgenden werden wir zeigen, dass diese Idee (unter gewissen einschränkenden Bedingungen) funktioniert.

Im folgenden sei M immer eine n-dimensionale, orientierte Untermannigfaltigkeit mit oder ohne Rand. Wir betrachten die folgenden Klassen von n-Formen:
1. Die n-Formen mit kompaktem Träger:

$$\Omega^n_o(M) := \{\omega \in \Omega^n(M) \mid \operatorname{supp} \omega = cl\{x \in M,\ \omega_x \neq 0\} \text{ ist kompakt}\},$$

2. Die positiven bzw. negativen n-Formen:

$$\Omega^n_+(M) := \{\omega \in \Omega^n(M) \mid \omega_x(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \geq 0\ \ \forall(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \in \mathcal{O}_{T_xM},\ x \in M\}$$

und

$$\Omega^n_-(M) := \{\omega \in \Omega^n(M) \mid \omega_x(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \leq 0\ \ \forall(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \in \mathcal{O}_{T_xM},\ x \in M\}.$$

Ist beispielsweise M kompakt, so ist $dM \in \Omega^n_0(M)$, ist M beliebig, so ist $dM \in \Omega^n_+(M)$.

Wir definieren zunächst das Integral für den Fall, daß die Menge A in einem Kartenbereich liegt.

Definition.[$\mathbf{I_1}$]
Sei $\omega \in \Omega^n_{0,\pm}(M^n)$ eine n-Form auf M, die kompakten Träger hat oder positiv bzw. negativ ist. A bezeichne eine meßbare Teilmenge von M, die in einer Kartenumgebung U von M enthalten ist. Es sei weiterhin $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine positiv–orientierte Karte und $\omega|_U = \omega_\varphi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, die lokale Darstellung von ω bezüglich (U, φ). Wir definieren das Integral von ω über A durch:

$$\int\limits_A \omega := \int\limits_{\varphi(A)} \omega_\varphi \circ \varphi^{-1}\, d\lambda_n,$$

wobei $d\lambda_n$ das Lebesgue–Maß des $\mathbb{R}^n$ ist.

Satz 9.30 *Die Definition* (I_1) *ist korrekt, d.h. die Zahl $\int\limits_A \omega$ ist unabhängig von der Wahl der positiv-orientierten Karte.*

Beweis: Sei $A \subset U$ und seien $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$ zwei positiv–orientierte Kartenabbildungen auf U. Bezüglich dieser Karten hat ω die lokale Darstellung

$$\omega = \omega_\varphi \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \omega_\psi \, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n.$$

Nach Definition ist

$$\omega_\varphi := \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) = \det\big(D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}\big)\, \omega\Big(\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\Big).$$

Wir bemerken, daß $\det(D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}) > 0$, denn die Jacobimatrix $D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ der Koordinatentransformation $T := \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(U)$ ist gerade die Übergangsfunktion zwischen den kanonischen Basen der Karten $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$, die beide positiv orientiert sind. Also ist

$$\omega_\varphi = |\det(DT)_\varphi| \cdot \omega_\psi$$

und somit

$$\omega_\varphi \circ \varphi^{-1} = |\det(DT)| \cdot (\omega_\psi \circ \psi^{-1} \circ T). \quad (*)$$

Anwenden der Transformationsformel für Lebesgue–Integrale (siehe Kapitel 10.6) ergibt

$$\begin{aligned} \int_A \omega &= \int_{\psi(A)=T(\varphi(A))} \omega_\psi \circ \psi^{-1}\, d\lambda^n = \int_{\varphi(A)} (\omega_\psi \circ \psi^{-1} \circ T) \cdot |\det DT|\, d\lambda^n \\ &\overset{(*)}{=} \int_{\varphi(A)} \omega_\varphi \circ \varphi^{-1} d\lambda^n = \int_A \omega, \end{aligned}$$

d.h. $\int_A \omega$ ist unabhängig von der Wahl der Karte. □

Im allgemeinen liegt die meßbare Menge A allerdings nicht in einem Kartenbereich. Um das Integral auch über einer solchen Menge korrekt definieren zu können, benutzt man die sogenannte *Zerlegung der 1.*

Definition. *Sei M^n eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein Atlas von M. Eine Zerlegung der 1 zum Atlas $\mathcal{A}$ ist eine abzählbare Familie $\{f_n\}_{n\geq 0}$ von nichtnegativen glatten Funktionen $f_n : M \longrightarrow [0,1]$ so daß*

1. *Die Träger von f_n, dh. die Mengen $\mathrm{supp} f_n = cl\{x \in M \mid f_n(x) \neq 0\}$ sind kompakt und in einer Kartenumgebung von $\mathcal{A}$ enthalten.*
2. *$\{supp\, f_n\}_{n\geq 0}$ ist eine lokal endliche Familie von Mengen, d.h. zu jedem $x \in M$ existiert eine Umgebung $U(x)$, so daß $U(x) \cap supp\, f_n \neq \emptyset$ nur für endlich viele n.*
3. *$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) \equiv 1$ für alle $x \in M$.*

Mit anderen Worten, die Funktionen f_n zerlegen die Funktion $f \equiv 1$ in eine Summe von Funktionen mit kompakten Trägern, die jeweils in einer Kartenumgebung liegen.
Wir zitieren hier ohne Bewis den folgenden Satz (siehe Vorlesung über Differentialgeometrie oder K. Jänich: Vektoranalysis, S. 158.)

Satz 9.31 *Zu jedem Atlas $\mathcal{A}$ auf M existiert eine Zerlegung $\{f_n\}_{n\geq 0}$ der 1.*

Nun können wir das Integral für beliebige meßbare Mengen definieren:

Definition. $[\mathbf{I_2}]$
Sei $A \subset M$ eine beliebige meßbare Teilmenge, $\omega \in \Omega^n_{0,\pm}(M^n)$ und $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ ein positiv–orientierter Atlas mit einer Zerlegung der 1, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Dann definieren wir

$$\int_A \omega := \sum_{\alpha\in\Lambda} \int_{A\cap U_\alpha} f_\alpha\, \omega.$$

Satz 9.32 *Die Definition* (I_2) *ist korrekt, d.h. unabhängig von $\mathcal{A}$ und $\{f_\alpha\}$ und stimmt für meßbare Teilmengen in einem Kartengebiet mit der Definition von* (I_1) *überein.*

Beweis: Sei $\widehat{\mathcal{A}} = \{V_\beta, \psi_\beta\}$ ein weiterer Atlas von M mit zugehöriger Zerlegung der 1, $\{g_\beta\}$. Wir müssen zeigen, daß

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha\cap A} f_\alpha\omega \;=\; \sum_\beta \int_{V_\beta\cap A} g_\beta\omega\;.$$

Es ist $f_\alpha = \sum\limits_\beta f_\alpha\cdot g_\beta$ und $g_\beta = \sum\limits_\alpha g_\beta\cdot f_\alpha$. Wegen $\mathrm{supp}(f_\alpha g_\beta\omega)\subset U_\alpha\cap V_\beta$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \int_{U_\alpha\cap A} f_\alpha\omega \;&=\; \sum_\alpha\sum_\beta \int_{U_\alpha\cap A} (f_\alpha\cdot g_\beta)\,\omega \;=\; \sum_\beta\sum_\alpha \int_{V_\beta\cap A} (f_\alpha\cdot g_\beta)\,\omega\\ &= \sum_\beta \int_{V_\beta\cap A} \sum_\alpha (f_\alpha\cdot g_\beta)\,\omega = \sum_\beta \int_{V_\beta\cap A} g_\beta\omega,\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt Summe und Integral vertauschen durften, da die Summe endlich ist, falls $\omega\in\Omega_0$, oder eine monotone Folge, falls $\omega\in\Omega_\pm$.
Sei nun (U,φ) eine positiv orientierte Karte und $A\subset U$. Wir wollen zeigen, daß

$$\int_{\varphi(A)} \omega_\varphi\circ\varphi^{-1}\,d\lambda_n = \sum_\alpha \int_{U_\alpha\cap A} f_\alpha\omega$$

gilt. Für jedes α ist die Menge $A\cap U_\alpha$ meßbar und in U enthalten. Nach Satz 9.31 ist der Wert $\int\limits_{A\cap U_\alpha} f_\alpha\omega$ wohldefiniert und wir können zu seiner Berechnung beliebige positiv–orientierte Koordinaten auf U, z.B. φ, wählen. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \int_{U_\alpha\cap A} f_\alpha\omega \;&=\; \sum_\alpha \int_{\varphi(U_\alpha\cap A)} (f_\alpha\circ\varphi^{-1})(\omega_\varphi\circ\varphi^{-1})\,d\lambda_n = \sum_\alpha \int_{\varphi(U\cap A)} (f_\alpha\circ\varphi^{-1})(\omega_\varphi\circ\varphi^{-1})\,d\lambda_n\\ &= \int_{\varphi(U\cap A)} \Big(\sum_\alpha f_\alpha\omega_\varphi\Big)\circ\varphi^{-1}\,d\lambda_n = \int_{\varphi(A)} \omega_\varphi\circ\varphi^{-1}\,d\lambda_n.\end{aligned}$$

□

Satz 9.33 Elementare Eigenschaften des Integrals

1. *Es sei $\omega\in\Omega^n_{0,\pm}(M)$ und $A\subset M$ meßbar. Ist $A = A_0\cup\bigcup\limits_{i=1}^N A_i$, wobei A_0 eine Nullmenge ist, die A_i paarweise disjunkt und meßbar sind und $N\le\infty$, so gilt*

$$\int_A \omega = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \omega.$$

2. *Das Integral ist linear. Seien ω_1 und ω_2 n–Formen aus $\Omega_0^n(M)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\int_A \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 = \lambda_1 \int_A \omega_1 + \lambda_2 \int_A \omega_2.$$

3. *Ist $\omega \in \Omega_0^n(M)$ eine positive Form und $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $f \leq g$. Dann gilt*

$$\int_A f\omega \leq \int_A g\omega.$$

4. *Sei $F : M \longrightarrow N$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, $A \subset M$ eine meßbare Menge und $\omega \in \Omega_{0,\pm}^n(N)$. Dann gilt*

$$\int_A F^*\omega = \int_{F(A)} \omega.$$

5. *$-M$ bezeichne die Untermannigfaltigkeit M, versehen mit der entgegengesetzten Orientierung. Dann gilt*

$$\int_{-A} \omega = -\int_A \omega.$$

Beweis: Zu 1. Dies folgt direkt aus den Eigenschaften des Lebesgue–Integrals:

$$\begin{aligned}\int_A \omega &\overset{I_2}{=} \sum_\alpha \int_{A\cap U_\alpha} f_\alpha\omega \overset{I_1}{=} \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap A)} (f_\alpha\omega_{\varphi_\alpha})\circ\varphi_\alpha^{-1}\, d\lambda_n = \sum_\alpha \sum_{i=0}^N \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap A_i)} (f_\alpha\omega_{\varphi_\alpha})\circ\varphi_\alpha^{-1}\, d\lambda_n \\ &= \sum_\alpha \sum_{i=1}^N \int_{U_\alpha\cap A_i} f_\alpha\omega \;=\; \sum_{i=1}^N \sum_\alpha \int_{A_i} f_\alpha\omega = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \sum_\alpha f_\alpha\omega = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \omega,\end{aligned}$$

wobei wir

$$\varphi_\alpha(A\cap U_\alpha) = \underbrace{\varphi_\alpha(A_0\cap U_\alpha)}_{Nullmenge} \cup \underbrace{\bigcup_{i=1}^N \varphi_\alpha(A_i\cap U_\alpha)}_{paarweise\ disjunkt}$$

und die Endlichkeit bzw. Monotonie von $\sum\limits_\alpha$ benutzt haben.
Zu 2. Folgt direkt aus der Definition.
Zu 3. Dies folgt aus der entsprechenden Eigenschaft der Lebesgue-Integrale.
Zu 4. Dies ist die koordinatenunabhängige Variante der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral. Nach 1. genügt es, die Behauptung für meßbare Mengen $A \subset M$ mit $A \subset U$ und $F(A) \subset V$ zu zeigen, wobei (U, φ) und (V, ψ) positiv orientierte Karten auf M bzw. N sind. Es gilt

$$\int_{F(A)} \omega \;=\; \int_{\psi(F(A))} \omega_\psi \circ \psi^{-1}\, d\lambda_n.$$

Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$T := \psi\circ F\circ\varphi^{-1} : \varphi(U\cap F^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n.$$

Dann folgt aus der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral (Kapitel 10.6)

$$\int_{F(A)} \omega = \int_{T(\varphi(A))} \omega_\psi\circ\psi^{-1}\, d\lambda_n = \int_{\varphi(A)} (\omega_\psi\circ\psi^{-1}\circ T)\cdot|\det DT|\, d\lambda_n.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
(F^*\omega)_\varphi(x) &= (F^*\omega)_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}(x)\Big) \;=\; \omega_{F(x)}\Big(dF_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}(x)\Big),\dots,dF_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_n}(x)\Big)\Big)\\
&= \underbrace{\det(D(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}))_{\varphi(x)}}_{=\det DT_{\varphi(x)}}\cdot\underbrace{\omega_{F(x)}\Big(\frac{\partial}{\partial y_1}(F(x)),\dots,\frac{\partial}{\partial y_n}(F(x))\Big)}_{\omega_\psi(F(x))}\\
&= \det DT_{\varphi(x)}\;\cdot\;\omega_\psi(F(x)),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition der kanonischen Basis und das Transformationsverhalten von Formen unter Koordinatenwechsel benutzt haben. Daraus folgt

$$(F^*\omega)_\varphi\circ\varphi^{-1} = (\det DT)\cdot(\omega_\psi\circ F\circ\varphi^{-1}) = (\det DT)\cdot(\omega_\psi\circ\psi^{-1}\circ T).$$

Wir bemerken, daß $\det(D(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}))>0$, denn F ist orientierungserhaltend. Somit erhalten wir

$$(F^*\omega)_\varphi\circ\varphi^{-1} = |\det DT|\cdot(\omega_\psi\circ\psi^{-1}\circ T)$$

und deshalb ist

$$\int\limits_{F(A)}\omega = \int\limits_{\varphi(A)}(F^*\omega)_\varphi\circ\varphi^{-1}\,d\lambda_n \;=\; \int\limits_A F^*\omega.$$

Zu 5. Wie oben dürfen wir oBdA annehmen, daß $A\subset U$, wobei $(U,\varphi=(x_1,\dots,x_n))$ eine positiv orientierte Karte auf M sei. Dann ist $(U,\hat\varphi=(-x_1,x_2,\dots,x_n))$ eine positiv orientierte Karte auf $-M$. Wir haben $\omega_\varphi=\omega(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n})=-\omega_{\hat\varphi}$. Definieren wir $T:=\varphi\circ\hat\varphi^{-1}$, dann ist $\det(DT)=-1$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_A\omega &= \int\limits_{\varphi(A)}(\omega_\varphi\circ\varphi^{-1})\,d\lambda_n = \int\limits_{T(\hat\varphi(A))}(\omega_\varphi\circ\varphi^{-1})\,d\lambda_n\\
&= \int\limits_{\hat\varphi(A)}(\omega_\varphi\circ\varphi^{-1}\circ T)\cdot\underbrace{|\det D(T)|}_{=1}\,d\lambda_n = -\int\limits_{\hat\varphi(A)}\omega_{\hat\varphi}\circ\hat\varphi^{-1}\,d\lambda_n.
\end{aligned}$$

Dann folgt aus der Definition

$$\int\limits_{-A}\omega = \int\limits_{\hat\varphi(A)}\omega_{\hat\varphi}\circ\hat\varphi^{-1}\,d\lambda^n = -\int\limits_A\omega.$$

□

Bemerkung: Aus der Eigenschaft (1) des Integrals ergeben sich folgende Regeln zur Berechnung von Integralen $\int\limits_A\omega$:

1. Nullmengen kann man aus dem Definitionsbereich weglassen,

2. Man zerlegt A geeignet in eine disjunkte Vereinigung meßbarer Mengen, die jeweils in einem Kartenbereich enthalten sind: $A=\bigcup\limits_{i=1}^N A_i$, $N\le\infty$. Dann kann man

$$\int\limits_a\omega \;=\; \sum_{i=1}^N\int\limits_{A_i}\omega$$

nach Definition (I_1) berechnen.

Folgerung: *Sei $\mathcal{L}(M)$ die σ–Algebra der meßbaren Teilmengen von M und $\omega \in \Omega^n_+(M)$ eine positive Form auf M. Dann ist*

$$\begin{aligned} \mu_\omega : \mathfrak{A}(M) &\longrightarrow [0,\infty] \\ A &\mapsto \int_A \omega \end{aligned}$$

ein Maß auf $\mathcal{L}(M)$ und das (entsprechend Kapitel 10.4 definierte) Integral für den Maßraum $(M, \mathcal{L}(M), \mu_\omega)$ erfüllt

$$\int_A f\, d\mu_\omega = \int_A f\,\omega.$$

Satz 9.34 (Mittelwertsatz) *Sei M eine orientierte, n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^n_+(M)$ eine positive n-Form auf M und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf M.*

1. *Sei $A \subset M$ eine kompakte, zusammenhängende Teilmenge. Dann existiert ein Punkt $x_0 \in A$, so daß*
$$f(x_0) \cdot \int_A \omega \;=\; \int_A f\,\omega.$$
2. *Sei $x \in M$ und $\big(A_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten, zusammenhängenden Umgebungen von x, die gegen $\{x\}$ konvergieren (d.h. $diam(A_n(x)) \to 0$). Dann gilt*
$$f(x) = \lim_{A_n(x)\to\{x\}} \frac{\int_{A_n(x)} f\,\omega}{\int_{A_n(x)} \omega}.$$

Beweis: 1. beweist man durch wörtliche Übertragung des Beweises des Mittelwertsatzes für bestimmte Integrale im $\mathbb{R}^1$ (siehe Kapitel 7.4).
2. Sei $x_n \in A_n(x)$ eine Folge von Punkten mit

$$f(x_n) \cdot \int_{A_n(x)} \omega = \int_{A_n(x)} f\omega\,. \qquad (*)$$

Da $A_n(x) \to \{x\}$, konvergiert die Folge (x_n) gegen x. Da f stetig, also folgenstetig ist, folgt die Behauptung aus (*) durch Grenzübergang. □

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine n-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und $\omega^n \in \Omega^n(\mathbb{R}^N)$ eine n-Form auf dem Einbettungsraum $\mathbb{R}^N$. Die Form ω definiert uns eine n-Form auf der Untermannigfaltigkeit M^n, indem wir in die n-Formen ω_x nur Vektoren einsetzen, die in x tangential an M^n sind:

$$\begin{aligned} \omega_x :\; T_xM \times \ldots \times T_xM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \ldots, v_n) &\longmapsto \omega_x(v_1, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

Dies ist die n-Form auf M^n, die aus $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^N)$ durch Zurückziehen mit der Einbettungsabbildung $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ entsteht. In der Regel schreiben wir in der Integrationstheorie für die zurückgezogene Form ebenfalls kurz ω anstelle von $\iota^*\omega$, um die Bezeichnungen einfach zu halten.

Sei z.B. $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit (d.h. eine Kurve im $\mathbb{R}^N$) und $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^N)$ eine 1-Form auf dem $\mathbb{R}^N$ oder auf einer offenen Umgebung der Kurve Γ. Das Integral

$$\int_\Gamma \omega$$

nennt man das *Kurvenintegral von ω über* Γ. Sei $\gamma : (a,b) \longrightarrow \Gamma$ eine reguläre Parametisierung von Γ (evt. bis auf endlich viele Punkte). Die lokale Darstellung von $\omega \in \Omega^1(\Gamma)$ hat die Form

$$\omega = \omega(\gamma'(t))\, dt$$

und folglich berechnet sich das Kurvenintergral durch

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma'(t))\, dt.$$

Beispiel: Sei $\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ die Kreislinie und $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$ die Windungsform

$$\omega := -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy.$$

Eine Parametrisierung des Kreises Γ ist gegeben durch

$$\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t)) \qquad t \in (0, 2\pi).$$

Wir erhalten $\gamma'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t))$ und folglich

$$\omega(\gamma'(t)) = (-r\sin(t) \cdot (-r\sin(t)), r\cos(t) \cdot (r\cos(t)) = r^2.$$

Für das Kurvenintegral folgt

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi} \omega(\gamma'(t))dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

9.10.3 Das Oberflächenintegral und das Volumen meßbarer Teilmengen

Wir betrachten jetzt das Maß, das durch die Volumenform definiert wird.
Sei M^n eine orientierte Untermannigfaltigkeit und dM die Volumenform von M^n.
Sei $A \subset M$ eine meßbare Teilmenge und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare (z.B. glatte oder stetige) Funktion auf M. Das Integral

$$\int_A f\, dM$$

heißt in 'klassischen' Büchern über Vektoranalysis das *Oberflächenintegral von f über $A \subset M$*.
Die Zahl

$$\mathrm{Vol}(A) := \int_A dM$$

nennt man das *Volumen von A*.
Ist A in einem Kartengebiet U enthalten, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ eine positiv orientierte Kartenabbildung auf U und $\big(g_{ij}\big)$ die Matrix der induzierten Riemannschen Metrik bzg. dieser Karte, so gilt nach Definition der Volumenform

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij})} \circ \varphi^{-1}\, d\lambda_n$$

Dieses entspricht den geometrischen Vorstellungen von Volumina von Teilmengen gekrümmter Flächen.

Bemerkungen:

1. Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine positiv orientierte Karte und bezeichne

$$x \in U \longrightarrow V(x) := \text{Volumen des von } \tfrac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}(x) \text{ aufgespannten Parallelepipeds in } T_xM$$

die von dieser Karte definierte Volumenfunktion. Dann ist für $A \subset U$ das Volumen $\mathrm{Vol}(A)$ die Mittlung der Volumenfunktion V über A.

2. Für Hyperflächen kann man die folgende geometrische Interpretation des Volumens beweisen:
Sei M^n eine orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Normalenabbildung $\mathfrak{n} : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Sei W eine Teilmenge von M und x_0 ein fixierter Punkt aus W. Wir bezeichnen mit $\widetilde{W}$ die Projektion von W auf die Tangentialebene $Tan_{x_0}M$ entlang $\mathfrak{n}(x_0)$. Sei nun $\mathcal{W} = (W_1, \ldots, W_k)$ eine Unterteilung von A in disjunkte meßbare Mengen und bezeichne

$$\mathrm{Vol}(A, \mathcal{W}) := \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}(\widetilde{W_i}) := \sum_{i=1}^{k} \lambda_n(\widetilde{W_i}).$$

Die Norm der Unterteilung sei

$$\|\mathcal{W}\| := max\{diam(W_i) \mid i = 1, \ldots, k\}.$$

Sei $(\mathcal{W}_n)$ eine Folge von Unterteilungen von A mit $\|\mathcal{W}_n\| \to 0$. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Vol}(A, \mathcal{W}_n).$$

(Man findet einen Beweis dazu im Buch von M. do Carmo: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen.

3. Das Volumen kann man auch für Teilmengen nichtorientierbarer Mannigfaltigkeiten definieren, da

$$d(-M) = -\,dM \qquad \text{und} \qquad \int_A dM = \int_{-A} d(-M).$$

Beispiel 1: Volumen von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Sei $A \subset M = \mathbb{R}^n$ eine meßbare Teilmenge der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$. In Euklidischen Koordinaten gilt für die Volumenform $d\mathbb{R}^n = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Wir erhalten also

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A dM = \int_A d\lambda_n = \lambda_n(A).$$

Beispiel 2: Volumen von Kurven (Länge)

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei $\gamma : (a,b) \longrightarrow M$ eine Kurve, die M bis auf endlich viele Punkte parametrisiert. Für die Volumenform gilt dann $dM_{\gamma(t)} = \|\gamma'(t)\| dt$. Das Volumen von M ist also gerade die Länge der Kurve γ

$$\mathrm{Vol}(M) = \int\limits_M dM = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \text{Länge}(\gamma)$$

Beispiel 3: Volumen von Flächen im $\mathbb{R}^3$ (Oberflächeninhalt)

Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ und $\Phi : U \subset R^2 \longrightarrow M$ eine lokale Parametrisierung von M. Bezeichne wie in Abschnitt 11.9.3

$$E := g_{11} = \Big\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \Big\rangle \quad , \quad F := g_{22} = \Big\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \Big\rangle \quad \text{und} \quad G := g_{12} = \Big\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \Big\rangle.$$

Die Volumenform ist gegeben durch

$$dM^2_{\Phi(U)} = \sqrt{EF - G^2}\ du_1 \wedge du_2 = \Big\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \Big\|\ du_1 \wedge du_2.$$

Ist also A eine meßbare Teilmenge in $\Phi(U)$ und $A = \Phi(W)$, so gilt für das Volumen (=Flächeninhalt) von A

$$\mathrm{Vol}(A) = \int\limits_W \sqrt{EF - G^2} du_1 du_2 = \int\limits_W \Big\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \Big\|\ du_1 du_2$$

Als Spezialfall erhält man (Übungsaufgaben):

Der Flächeninhalt eines Graphen:

Sei $F : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und
$M^2 = \text{graph}(F) = \{(u_1, u_2, F(u_1,u_2)) \mid (u_1,u_2) \in U\}$ der Graph von M. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}(M^2) = \int\limits_U \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial F}{\partial u_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial F}{\partial u_2}\Big)^2}\ du_1 du_2.$$

Der Flächeninhalt einer Rotationsfläche:

Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte reguläre Kurve mit $\gamma_1 > 0$ und bezeichne

$$M^2_\gamma := \{\, (\gamma_1(u)\cos v, \gamma_1(u)\sin v, \gamma_2(u)) \mid v \in \mathbb{R}, u \in [a,b]\,\}$$

die von γ erzeugte Rotationsfläche. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}(M^2_\gamma) = 2\pi \int\limits_a^b \gamma_1(u)\, \|\gamma'(u)\|\ du$$

9.11 Der Satz von Stokes

Für das Riemann-Integral kennt man die Formel

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Unter gewissen Bedingungen an den Integranden kann man also das Integal durch Werte auf dem Rand des Integrationsbereiches ausdrücken. Dies wollen wir nun auf Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern. Wir werden zeigen, daß man das Integral

$$\int_M \sigma$$

durch ein Integral über den Rand ∂M ausdrücken kann, falls die n-Form σ exakt ist.

9.11.1 Der Satz von Stokes für Differentialformen

Satz 9.35 (Satz von Stokes)
Sei M^n eine n-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit, ∂M der Rand von M, versehen mit der induzierten Orientierung und ω eine $(n-1)$-Form mit kompaktem Träger auf M. Dann gilt

$$\int_M d\omega \;=\; \int_{\partial M} \omega \qquad (*)$$

Beweis: Sei $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein Atlas auf M und $\{f_\alpha\}$ eine Zerlegung der 1 zu $\mathcal{A}$. Dann ist $\omega = \sum\limits_\alpha f_\alpha \omega$, wobei die Summe endlich ist, da $\operatorname{supp} \omega$ kompakt und die Familie der Träger $\{\operatorname{supp} f_\alpha\}$ lokal endlich ist. Da die linke und rechte Seite von (*) linear in ω sind, genügt es zu zeigen, daß $\int\limits_M d(f_\alpha \omega) = \int\limits_{\partial M} f_\alpha \omega$ gilt. Deshalb können wir, um (*) zu beweisen, oBdA annehmen, daß der Träger $\operatorname{supp} \omega$ in einem Kartenumgebung U von M liegt.
Wir werden nun (*) durch direktes Ausrechnen beider Integrale beweisen.
(1) Berechnung von $\int\limits_M d\omega$:
Sei $(U, \varphi = (x_1, \dots x_n))$ eine positiv orientierte Karte mit $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n_+$. Bezüglich dieser Karte ist ω durch

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n, \quad \text{mit} \quad \omega_i = \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)$$

gegeben. Wenden wir das Differential darauf an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} d\omega \;&=\; \sum_{i=1}^n d\omega_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_i)\, dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &=\; \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_i)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx^n = (d\omega)_\varphi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen und Umformen des Integrals erhalten wir

$$\int_M d\omega \;=\; \int_U d\omega = \int_{\varphi(U)} (d\omega)_\varphi \circ \varphi^{-1}\, d\lambda_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int\limits_{\varphi(U)} \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_i) \circ \varphi^{-1} \, d\lambda_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_i \circ \varphi^{-1})(x) \, dx_i \Big) dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n}_{(**)},$$

wobei die letzte Identität aufgrund des Satzes von Fubini gilt. Da $\operatorname{supp} \omega \subset \varphi(U)$, konnten wir beim letzten Schritt den Integrationsbereich über ganz $\mathbb{R}^n$ ausdehnen. Nun unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $i < n$, so gilt

$$(**) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_i \circ \varphi^{-1})(x) \, dx_i = [\omega_i \circ \varphi^{-1}]_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

da $\operatorname{supp} \omega_i$ kompakt ist. Falls $i = n$ ist, so gilt

$$(**) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_n}(\omega_n \circ \varphi^{-1})(x) \, dx_i = -\omega_n(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)).$$

Daraus folgt

$$\int\limits_{M} d\omega = (-1)^n \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n\big(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\big) \, d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

(2) Berechnung von $\int\limits_{\partial M} \omega$:

Da $\operatorname{supp} \omega \subset U$, ist $\operatorname{supp} \omega|_{\partial M} \subset \partial M \cap U$. Ist $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ eine Karte auf M, so ist $(U \cap \partial M, \varphi|_{U \cap \partial M} = (x_1, \dots, x_{n-1}))$ eine Karte auf ∂M, da der Rand durch $x_n = 0$ charakterisiert ist. Sei $\nu : \partial M \longrightarrow TM$ das Vektorfeld der äußeren Normale des Randes. Die folgenden Basen von T_xM in einem Randpunkt $x \in \partial M$ sind gleichorientiert:

$$\begin{aligned} \Big(\nu(x), \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(x)\Big) \ &\sim \ \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(x), (-1)^{n-1}\nu(x)\Big) \\ &\sim \ \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(x), (-1)^{n}\frac{\partial}{\partial x_n}(x)\Big) \end{aligned}$$

da die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ und $\nu(x)$ nach Definition in verschiedene Richtungen bezüglich $T_x\partial M$ zeigen, $\nu(x)$ nach außen und $\frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ nach innen. Also ist die Karte $(U \cap \partial M, \varphi|_{U \cap \partial M})$ des Randes positiv orientiert, falls n gerade ist und negativ orientiert, falls n ungerade ist. Die lokale Darstellung von $\omega|_{U \cap \partial M}$ bzgl. der Randkarte ist

$$\omega|_{U \cap \partial M} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n|_{U \cap \partial M} = \omega_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1},$$

denn für jeden Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial x_j}(x) \in T_x\partial M$, $j = 1, \dots, n-1$, ist $(dx_n)_x(\frac{\partial}{\partial x_j}(x)) = 0$.

(a) Sei n gerade. Dann ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial M} \omega \ &= \int\limits_{U \cap \partial M} \omega_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} = \int\limits_{\varphi(U \cap \partial M)} \omega_n \circ \varphi^{-1} \, d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n\big(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\big) \, d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

(b) Ist n ungerade, so ist

$$\int\limits_{\partial M} \omega \overset{9.33}{=} - \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n\big(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\big)\, d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Damit ist die Behauptung $\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega$ bewiesen. $\square$

9.11.2 Zwei typische Anwendungen des Satzes von Stokes

Der Satz von Stokes ist einer der zentralen Sätze in der Integrationstheorie. Er hat sehr vielfältige Anwendungen in Geometrie, Analysis und mathematischer Physik. Zwei Anwendungen werden wir jetzt zeigen. In den Vorlesungen des Hauptstudiums (z.B. Differentialgeometrie) wird man weitere Anwendungen treffen.

Berechnung des Volumens der Sphäre:

Sei $D_r^n \subset \mathbb{R}^n$ die Vollkugel vom Radius r in $\mathbb{R}^n$, also $D_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ und $S_r^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$ ihr Rand, die $n-1$-dimensionale Sphäre vom Radius r. In Kapitel 10.6 haben wir bereits das Volumen der Kugel berechnet

$$\mathrm{Vol}(D_r^n) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{(\frac{n}{2})!}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} r^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n}, & \text{falls } n \text{ ungerade .} \end{cases}$$

Satz 9.36 *Für das Volumen der Sphäre gilt*

$$\mathrm{Vol}(S_r^{n-1}) = \frac{n}{r} \cdot \mathrm{Vol}(D_r^n).$$

Beweis: Es gilt $\partial D_r^n = S_r^{n-1}$ und $\mathrm{Vol}(S_r^{n-1}) = \int\limits_{S_r^{n-1}} dS_r^{n-1}$. Wir betrachten auf D_r^n die Euklidischen Koordinaten $(x_1, \dots, x_n)$. Dann ist die Volumenform von D_r^n gegeben durch

$$dD_r^n = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

und das Vektorfeld der äußeren Normalen auf dem Rand S_r^{n-1} von D_r^n durch

$$\nu(x) = \frac{x}{r} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \qquad x \in S_r^{n-1}$$

Aus Satz 9.28 folgt nun

$$\begin{aligned} (dS_r^{n-1})_x &= i_{\nu(x)}(dD_r^n)_x \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{r}\, i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\big(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\big) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j \underbrace{\Big(dx_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\Big)}_{=1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Bezeichne ω die $(n-1)$-Form

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_j \; dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Für ihr Differential gilt

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n = \sum_{j=1}^{n} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \; = \; n \, dD_r^n$$

Somit erhalten wir mit dem Satz von Stokes für das Volumen der Sphäre

$$\mathrm{Vol}(S_r^{n-1}) = \int\limits_{S_r^{n-1}} dS_r^{n-1} = \frac{1}{r} \int\limits_{S_r^{n-1}} \omega = \frac{1}{r} \int\limits_{D_r^n} d\omega = \frac{n}{r} \int\limits_{D_r^n} dD_r^n = \frac{n}{r} \, \mathrm{Vol}(D_r^n)$$

□

Für eine weitere geometrische Anwendung des Satzes von Stokes erinnern wir an den Begriff der homotopen Abbildungen.

Definition. *Seien f_0 und $f_1 : M \longrightarrow N$ zwei glatte Abbildungen zwischen den Untermannigfaltigkeiten M und N. f_0 und f_1 heißen glatt–homotop zueinander, falls eine C^∞–Abbildung $H : [0,1] \times M \longrightarrow N$ existiert, so daß $H(0,x) = f_0(x)$ und $H(1,x) = f_1(x)$ gilt. Das heißt, man hat eine Schar von Abbildungen $f_t : M \longrightarrow N$ mit $f_t(x) = H(t,x)$, die f_0 in f_1 überführen. Bezeichnung: $f_0 \sim_H f_1$.*

Satz 9.37 *Seien M^n und N^n kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeiten ohne Rand und ω eine n–Form mit kompaktem Träger auf N. Sind $f_0, f_1 : M \longrightarrow N$ zwei glatt-homotope Abbildungen, so gilt*

$$\int\limits_{M^n} f_0^* \omega = \int\limits_{M^n} f_1^* \omega.$$

Beweis: Sei $I = [0,1]$. Der Rand der Untermannigfaltigkeit $I \times M$ ist gegeben durch $\partial(I \times M) = M \cup (-M)$, wobei $-M$ die Untermannigfaltigkeit M mit entgegengesetzter Orientierung ist. Also folgt aus $f_0 \sim_H f_1$, daß

$$\int\limits_{\partial(I\times M)} H^* \omega = \int\limits_{M} f_0^* \omega + \int\limits_{-M} f_1^* \omega = \int\limits_{M} f_0^* \omega - \int\limits_{M} f_1^* \omega.$$

Andererseits ergibt das Anwenden des Satzes von Stokes

$$\int\limits_{\partial(I\times M)} H^* \omega = \int\limits_{I\times M} d(H^* \omega) = \int\limits_{I\times M} H^* d\omega = 0,$$

da $d\omega \in \Omega^{n+1}(N^n) = \{0\}$. Somit erhalten wir $\int\limits_M f_0^* \omega = \int\limits_M f_1^* \omega$. □

Wir zeigen jetzt, dass man “einen Igel nicht kämmen kann“.

Satz 9.38 (Igelsatz) *Jedes Vektorfeld X auf einer Sphäre $S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ gerader Dimension hat mindestens eine Nullstelle, d.h. es existiert ein $x \in S^{2n}$ mit $X(x) = 0$.*

Bemerkung: Auf Sphären ungerader Dimension ist dieser Satz falsch; man betrachte etwa das Vektorfeld $X(x_1, \ldots, x_{2n+2}) := (x_2, -x_1, x_3, -x_4, \ldots, x_{2n+2}, -x_{2n+1})$.

Beweis von Satz 12.38: Sei X ein Vektorfeld auf S^n. Angenommen X habe keine Nullstelle. Mit τ bezeichnen wir die sogenannte antipodale Abbildung, definiert durch $\tau(x) := -x$. Da X keine Nullstelle hat, erhalten wir durch

$$H(t,x) := \cos(\pi t)\, x + \sin(\pi t)\, \frac{X(x)}{\|X(x)\|}$$

eine glatte Homotopie zwischen der Identität und der antipodalen Abbildung τ. Aus Satz 9.37 folgt dann

$$\int\limits_{S^n} dS^n = \int\limits_{S^n} \tau^*\, dS^n. \quad (*)$$

Wir drücken jetzt die n-Form $\tau^*\, dS^n$ durch die Volumenform der Sphäre aus. Die Orientierung auf der Sphäre S^n sei durch das Einheitsnormalenfeld $\mathfrak{n}(x) = x$ festgelegt, d.h. es gilt

$$(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \in \mathcal{O}_{T_xS^n} \iff (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, x) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{n+1}} \qquad (**)$$

Sei nun $(e_1, \ldots, e_n)$ eine positiv orientierte orthonormale Basis in T_xS^n. Dann ist $(e_1, \ldots, e_n)$ auch eine orthonormale Basis in $T_{-x}S^n$, die wegen (**) negativ orientiert ist. Wir erhalten also für die n-Form $\tau^* dS^n$

$$\begin{aligned}(\tau^* dS^n)_x(e_1, \ldots, e_n) &= dS^n_{-x}(-e_1, \ldots, -e_n) = (-1)^n dS^n_{-x}(e_1, \ldots, e_n) \\ &= (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1} dS^n_x(e_1, \ldots, e_n).\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\tau^* dS^n = (-1)^{n+1} dS^n$$

und für das Volumen der Sphäre würde aus (*) folgen

$$\mathrm{Vol}(S^n) = \int\limits_{S^n} dS^n = \int\limits_{S^n} \tau^* dS^n = (-1)^{n+1} \int\limits_{S^n} dS^n = (-1)^{n+1}\, \mathrm{Vol}(S^n).$$

Dies ist für gerade Dimensionen n ein Widerspruch. □

9.11.3 Weitere Integralsätze für Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt leiten wir weitere Integralsätze auf Mannigfaltigkeiten aus dem Satz von Stokes ab. Im ganzen Abschnitt sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ ist eine zusammenhängende, kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂M und $\nu : \partial M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ das Vektorfeld der äußeren Normalen auf ∂M.

Satz 9.39 (Divergenz–Formel) *Es sei X ein Vektorfeld auf M. Dann gilt*

$$\int\limits_M \mathrm{div}(X)\, dM = \int\limits_{\partial M} \langle X, \nu\rangle\, d(\partial M).$$

Beweis: Wir wissen aus Satz 9.17 bereits, daß

$$\mathrm{div}(X)\, dM = L_X dM := d(i_X dM) + i_X\, ddM = d(i_X dM)$$

gilt. Somit folgt aus dem Satz von Stokes

$$\int\limits_M \mathrm{div}(X)\, dM = \int\limits_{\partial M} i_X dM.$$

Wir zerlegen $X|_{\partial M}$ in eine Normalen– und eine Tangentialkomponente. Sei $x \in \partial M$ und

$$X(x) = \underbrace{\langle X(x), \nu(x)\rangle \nu(x)}_{\in T_xM,\, \perp T_x\partial M} + \underbrace{X^*(x)}_{\in T_x\partial M}.$$

Dann gilt (betrachtet als Differentialform auf ∂M)

$$i_{X^*} dM|_{\partial M} = 0 \qquad \text{auf } \partial M,$$

da n Vektoren im $(n-1)$-dimensionalen Vektorraum $T_x\partial M$ linear abhängig sind. Also gilt

$$i_X dM|_{\partial M} = \langle X, \nu\rangle\, i_\nu dM|_{\partial M} \overset{9.28}{=} \langle X, \nu\rangle\, d(\partial M)$$

und es folgt

$$\int\limits_M \operatorname{div}(X)\, dM = \int\limits_{\partial M} \langle X, \nu\rangle\, d(\partial M).$$

□

Satz 9.40 (Satz von Gauß) *Sei X ein Vektorfeld und f eine glatte Funktion auf M. Dann gilt*

$$\int\limits_M X(f)\, dM + \int\limits_M f \cdot div(X)\, dM = \int\limits_{\partial M} f \cdot \langle X, \nu\rangle\, d(\partial M).$$

Beweis: Da $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + X(f)$, folgt die Behauptung aus der Divergenz–Formel, Satz 9.39. □

Satz 9.41 (Greensche Formeln) *Seien f und h glatte Funktionen auf M. Dann gilt*

1. $\int\limits_M h \cdot \triangle(f)\, dM + \int\limits_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle\, dM = \int\limits_{\partial M} h \cdot \nu(f)\, d(\partial M)$,
2. $\int\limits_M (h \cdot \triangle(f) - f \cdot \triangle(h))\, dM = \int\limits_{\partial M} \big(h \cdot \nu(f) - f \cdot \eta(h)\big)\, d(\partial M)$.

Beweis: Gemäß Definition gilt $\triangle(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$. Das Anwenden des Satzes von Gauß liefert

$$\begin{aligned}
\int\limits_M h \cdot \triangle(f)\, dM &= \int\limits_M h \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)\, dM = \int\limits_{\partial M} h \cdot \langle \operatorname{grad} f, \nu\rangle\, d(\partial M) - \int\limits_M \big(\operatorname{grad} f\big)(h)\, dM \\
&= \int\limits_{\partial M} h\, df(\nu)\, d(\partial M) - \int\limits_M dh(\operatorname{grad} f)\, dM \\
&= \int\limits_{\partial M} h\, \nu(f)\, d(\partial M) - \int\limits_M \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f\rangle\, dM.
\end{aligned}$$

Die zweite Formel folgt durch zweimaliges Anwenden des soeben bewiesenen. □

Folgerung 1: *Sei M^n eine kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Dann gilt*

1. $\int\limits_M \operatorname{div}(X)\, dM = 0$ für alle Vektorfelder X.

2. Der Laplace–Operator $\triangle : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ ist formal selbstadjungiert auf $C^\infty(M)$ bezüglich dem Skalarprodukt $\langle f,h\rangle_{L^2} = \int\limits_M f \cdot h \; dM$, d.h. es gilt die Formel
$$\langle \triangle f, h\rangle_{L^2} = \int\limits_M \triangle f \cdot h \; dM \overset{Green}{=} \int\limits_M f \cdot \triangle h \; dM = \langle f, \triangle h\rangle_{L^2}.$$

Folgerung 2: *Sei M^n eine orientierte, kompakte, zusammenhängende Untermannigfaltigkeit ohne Rand und f eine glatte Funktion auf M mit $\triangle f \geq 0$. Dann ist f konstant.*

Beweis: Gemäß Folgerung 1 haben wir
$$\int\limits_M \triangle f \, dM = \int\limits_M \triangle f \cdot 1 \, dM = \int\limits_M f \cdot \triangle(1) \, dM = 0.$$
Da $\triangle f \geq 0$ und dM eine positive n-Form ist, folgt daraus $\triangle f \equiv 0$. Das Anwenden der 1. Greenschen Formel ergibt
$$0 = \int\limits_M f \triangle f \, dM = -\int\limits_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\rangle \, dM = -\|\operatorname{grad} f\|^2_{L_2}.$$
Folglich ist $\operatorname{grad} f = 0$ und damit $df = 0$. Da M zusammenhängend ist, muß f also konstant sein. □

Definition. *Eine Funktion $f \in C^2(M)$ heißt harmonisch, falls $\triangle f = 0$.*

Folgerung 3: *Sei M eine orientierte, kompakte, zusammenhängende Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Dann ist jede harmonische Funktion $f \in C^2(M)$ konstant.*

9.11.4 Klassische Integralsätze im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Abschließend leiten wir aus dem Satz von Stokes einige klassische Integralsätze im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ ab, wie man sie oft in Büchern über Vektoranalysis findet. Zunächst ein Satz für Gebiete im $\mathbb{R}^2$:

Satz 9.42 *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit dem Rand $\partial G = \Gamma$ und bezeichne $X = (\xi_1, \xi_2) : G \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld auf G. Desweitern sei $\nu = (\nu_1, \nu_2) : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld der äußeren Normalen auf ∂G. Dann gilt*

1. $\displaystyle\int\limits_G \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int\limits_\Gamma \Big(\xi_1 \, dx_1 + \xi_2 \, dx_2\Big).$

2. $\displaystyle\int\limits_G \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int\limits_\Gamma \Big(\xi_1 \nu_1 + \xi_2 \nu_2\Big) d\Gamma.$

Beweis: Wir betrachten die 1-Form $\omega := \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \in \Omega^1(G)$. Dann gilt
$$d\omega = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge x_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge x_2 = \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2.$$
Die erste Behauptung folgt dann aus dem Satz von Stokes. Für die Divergenz des Vektorfeldes X gilt
$$div(X) = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}.$$

Die 2. Formel folgt somit ein Spezialfall der Divergenzformel. □.

Für die Formulierung der klassischen Integralsätze im $\mathbb{R}^3$ erinnern wir nochmal an die Begriffe *Divergenz, Gradient* und *Rotation.* Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ und $X : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit den Komponenten $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Die *Rotation von* X ist ein neues Vektorfeld, das durch

$$\mathrm{rot}\,(X) := \Big(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \Big).$$

definiert ist. Die Divergenz von X durch

$$\mathrm{div}(X) = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}$$

gegeben. Für den Gradienten einer glatten Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{grad} f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big)$$

Durch direkte Rechnung zeigt man die folgenden Eigenschaften für die Rotation (Übungsaufgabe 9.10):

1. $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,(X)) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{X}(U)$,
2. $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = 0$ für alle $f \in C^\infty(U)$,
3. $\mathrm{rot}\,(f \cdot X) = f \cdot \mathrm{rot}\,(X) + \mathrm{grad}\, f \times X$.

Mit dem Lemma von Poincare erhält man für ein Vektorfeld Y auf sternförmigen Mengen $U \subset \mathbb{R}^3$ darüber hinaus:

1. $\mathrm{div}(Y) = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{rot}(X) = Y$ für ein Vektorfeld X auf U.
2. $\mathrm{rot}(Y) = 0$ genau dann, wenn $Y = \mathrm{grad} f$ für eine Funktion f auf U.

In der klassischen Vektoranalysis trifft man folgende Bezeichnungen:

$$d\vec{s} := \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \in \Omega^1(U, \mathbb{R}^3)$$

heißt das *vektorielle Linienelement* auf U,

$$d\vec{F} := \begin{pmatrix} dx_2 \wedge dx_3 \\ dx_3 \wedge dx_1 \\ dx_1 \wedge dx_2 \end{pmatrix} \in \Omega^2(U, \mathbb{R}^3)$$

heißt das *vektorielle Flächenelement* auf U und die übliche Volumenform

$$dV := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \in \Omega^3(U)$$

heißt *das Volumenelement* von U.
Ist $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ein Vektorfeld auf U, so bezeichnen $X \cdot d\vec{s}$ bzw. $X \cdot d\vec{F}$ die 1- bzw. 2-Formen

$$\begin{aligned} X \cdot d\vec{s} &:= \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 + \xi_3 dx_3 \in \Omega^1(U) \\ X \cdot d\vec{F} &:= \xi_1\, dx_2 \wedge dx_3 + \xi_2\, dx_3 \wedge dx_1 + \xi_3\, dx_1 \wedge dx_2 \in \Omega^2(U). \end{aligned}$$

Satz 9.43 (Klassischer Satz von Stokes für Flächen im $\mathbb{R}^3$)
Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, orientierte Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit Rand ∂M. Es bezeichne

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{n} : M^2 & \longrightarrow & S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & \mathfrak{n}(x) \perp T_x M^2 \end{array}$$

das der Orientierung von M entsprechende Einheitsnormalenvektorfeld von M und $\mathfrak{t} : \partial M \longrightarrow T(\partial M)$ das tangentiale Einheitsvektorfeld der 1–dimensionalen Mannigfaltigkeit ∂M, das der induzierten Orientierung des Randes entspricht. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von M und X ein auf U definiertes Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_M^2 \langle rot(X), \mathfrak{n}\rangle \, dM = \int_{\partial M^2} \langle X, \mathfrak{t}\rangle \, d(\partial M).$$

bzw. in der klassischen Schreibweise

$$\int_{M^2} \mathrm{rot}(X) \cdot d\vec{F} = \int_{\partial M^2} X \cdot d\vec{s}$$

Beweis: Wir betrachten die zu X duale 1-Form

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} \xi_i \, dx_i = X \cdot d\vec{s}$$

und wenden darauf den Satz von Stokes an. Mit $\mathrm{rot}\, X = (R_1, R_2, R_3)$ bezeichnen wir zur Abkürzung die Rotation von X. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= d\xi_1 \wedge dx_1 + d\xi_2 \wedge dx_2 + d\xi_3 \wedge dx_3 \\ &= \partial_2(\xi_1) dx_2 \wedge dx_1 + \partial_3(\xi_1) dx_3 \wedge dx_1 + \partial_1(\xi_2) dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad + \partial_3(\xi_2) dx_3 \wedge dx_2 + \partial_1(\xi_3) dx_1 \wedge dx_3 + \partial_2(\xi_3) dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (\partial_2(\xi_3) - \partial_3(\xi_2)) dx_2 \wedge dx_3 + (\partial_3(\xi_1) - \partial_1(\xi_3)) dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + (\partial_1(\xi_2) - \partial_2(\xi_1)) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= R_1 dx_2 \wedge dx_3 + R_2 dx_3 \wedge dx_1 + R_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \mathrm{rot}(X) \cdot d\vec{F} \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Stokes folgt jetzt

$$\int_{M^2} \mathrm{rot}(X) \cdot d\vec{F} = \int_{\partial M^2} X \cdot d\vec{s}$$

Wir haben nun noch zu beweisen, dass

$$\begin{aligned} d\omega &= \mathrm{rot}(X) \cdot d\vec{F} = \langle \mathrm{rot}\, X, \mathfrak{n}\rangle \, dM \qquad \text{und} \qquad (*) \\ \omega &= X \cdot d\vec{s} = \langle X, \mathfrak{t}\rangle \, d(\partial M). \qquad (**) \end{aligned}$$

gilt. Sei dazu $\Phi : W \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ eine lokale Parametrisierung von M. Dann gilt für das Normalenfeld

$$\mathfrak{n}(\Phi(u)) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}(u)}{\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}(u) \|} \in \mathbb{R}^3 \qquad u = (u_1, u_2).$$

und für die Volumenform

$$dM = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right\| du_1 \wedge du_2 \, .$$

Nach Definition des alternierenden Produktes und des Vektorproduktes folgt außerdem für die 1. Komponente des Vektorproduktes

$$(dx_2 \wedge dx_3)\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\Big) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_2} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} = \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\Big)_1,$$

d.h. es gilt

$$dx_2 \wedge dx_3 = \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\Big)_1 du_1 \wedge du_2$$

Analog rechnet man für die anderen Komponenten und erhält mit $\mathfrak{n} = (N_1, N_2, N_3)$,

$$\begin{aligned} N_1\, dM &= dx_2 \wedge dx_3 \\ N_2\, dM &= dx_3 \wedge dx_2 \\ N_3\, dM &= dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Folglich ist $\langle \operatorname{rot} X, \mathfrak{n}\rangle\, dM = \sum\limits_{i=1}^{3} R_i N_i\, dM = d\omega$ und (*) gezeigt.

Sei nun $\mathfrak{t} = (T_1, T_2, T_3)$. Da $\mathfrak{t}$ ein der Orientierung entsprechendes Einheitsvektorfeld auf dem Rand ist, folgt wegen $dx_i(\mathfrak{t}) = T_i$ und $d(\partial M)(\mathfrak{t}) = 1$, dass

$$T_i\; d(\partial M) = dx_i \qquad \text{auf } \partial M.$$

Wir erhalten also (**)

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} \xi_i\, dx_i = \sum_{i=1}^{3} \xi_i T_i\, d(\partial M) = \langle \mathfrak{t}, X\rangle\, d(\partial M).$$

□

Aus dem Mittelwertsatz erhalten wir nun folgende Folgerung:

Folgerung: *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$, $x_0 \in U$ ein fixierter Punkt und $K_\varepsilon(x_0)$ die Kreisscheibe vom Radius ε um x_0 in der zu $\mathfrak{n}$ orthogonalen Ebene durch x_0. Dann gilt für die Rotation eines Vektorfeldes X auf U*

$$\langle \operatorname{rot}(X), \mathfrak{n}\rangle(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int\limits_{\partial K_\varepsilon(x_0)} X \cdot d\vec{s}$$

Diesen Grenzwert nennt man auch die *Wirbelstärke von X um $\mathfrak{n}$* und $\operatorname{rot}(X)(x_0)$ selbst auch *Wirbeldichte von X in x_0*. Ein Vektorfeld X heißt *wirbelfrei*, wenn $\operatorname{rot}(X) = 0$ gilt. Ein Vektorfeld X auf einer sternförmigen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann wirbelfrei, wenn es eine glatte Funktion f auf U mit $X = \operatorname{grad} f$ gibt (Übungsaufgabe 9.15.).

Man kann auch die Wirbeldichte selbst als den Grenzwert eines Integrals ausdrücken. Wir vereinbaren dazu die folgende Notation:
Ist V^3 eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ (d.h. ein Körper) und $B = (B_1, B_2, B_3)$ ein Vektorfeld auf V^3. Dann sei

$$\int\limits_V B\, dV := \Bigg(\int\limits_V B_1\, dV\,,\ \int\limits_V B_2\, dV\,,\ \int\limits_V B_3\, dV\Bigg).$$

Satz 9.44 *Sei $V^3 \subset \mathbb{R}^3$ eine 3–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ mit dem Rand $\partial V^3 = M^2$. Sei X ein Vektorfeld auf V^3 und $\nu : \partial V^3 = M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld der äußeren Normalen des Randes von V. Dann gilt*

$$\int_{V^3} \operatorname{rot}(X)\, dV = - \int_{M^2} (X \times \nu)\, dM.$$

Beweis: Sei $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Wir definieren auf V eine 2–Form ω mit Werten in $\mathbb{R}^3$ durch:

$$\omega := \big(-\xi_3\, dx_1 \wedge dx_3 - \xi_2\, dx_1 \wedge dx_2\,,\ \xi_1\, dx_1 \wedge dx_2 - \xi_2\, dx_2 \wedge dx_3\,,\ \xi_2\, dx_2 \wedge dx_3 + \xi_1\, dx_1 \wedge dx_3 \big).$$

Dann rechnet man leicht aus, daß

$$d\omega = \operatorname{rot}(X)\, dV \ = \ \operatorname{rot}(X)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Wir haben zu zeigen, daß

$$\omega = -(X \times \nu)\, dM \qquad \text{auf } M = \partial V$$

gilt. Nach Definition stimmt das Vektorfeld der aüßeren Normale $\nu : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit dem Einheitsnormalenvektorfeld $\mathfrak{n} = (N_1, N_2, N_3) : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ von $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ überein. Aus dem Beweis von Satz 9.43 wissen wir deshalb bereits, dass

$$N_1\, dM = dx_2 \wedge dx_3 \quad , \quad N_2\, dM = dx_3 \wedge dx_1 \quad \text{und} \quad N_3\, dM = dx_1 \wedge dx_2$$

Setzen wir dies in die Definition von ω ein, so erhalten wir

$$\omega = (\xi_3 N_2 - \xi_2 N_3, \xi_1 N_3 - \xi_3 N_1, \xi_2 N_1 - \xi_1 N_2)\, dM = -(X \times \mathfrak{n})\, dM.$$

Nun folgt die Behauptung aus dem Satz von Stokes. □

Aus dem Mittelwertsatz folgt

Folgerung: *Sei X ein Vektorfeld in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und bezeichne $S^2_\varepsilon(x_0)$ die Sphäre um x_0 vom Radius ε. Dann gilt*

$$\operatorname{rot}(X)(x_0) = - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{S^2_\varepsilon(x_0)} (X \times \nu)\, dS^2_\varepsilon\,.$$

Analog wie in Satz 9.43 können wir die Divergenzformel aus Satz 9.39 in der klassischen Form schreiben und erhalten

Satz 9.45 *Sei V^3 eine 3–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ mit dem Rand $\partial V^3 = M^2$ und $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ein Vektorfeld auf V. Dann gilt*

$$\int_V \Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \Big)\, dV = \int_M X \cdot d\vec{F}$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt

Folgerung: *Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und X ein Vektorfeld, das auf einer Umgebung von x_0 definiert ist. Bezeichne $S^2_\varepsilon(x_0)$ die Sphäre um x_0 vom Radius ε. Dann gilt*

$$\operatorname{div}(X)(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{S^2_\varepsilon(x_0)} X \cdot d\vec{F}\,.$$

Interpretiert man X als das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden, inkompressiblen Flüssigkeit, dann ist $\int\limits_{\partial V} X \cdot d\vec{F}$ die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit vom Strömungsfeld X durch den Rand ∂V transportiert wird und die Zahl

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(V)} \int\limits_{\partial V} X \cdot d\vec{F}$$

beschreibt die Ergiebigkeit des Feldes X in V. Nach der vorstehenden Folgerung mißt also $\mathrm{div}(X)(x_0)$ "Quelldichte" von X. Ein Vektorfeld X heißt *quellenfrei*, falls $\mathrm{div}(X) = 0$ gilt. Wirbelfelder $\mathrm{rot}(B)$ sind quellenfrei. Ein auf einem sternförmigen Gebiet U definiertes Vektorfeld X ist genau dann quellenfrei, wenn es ein Vektorfeld B auf U mit $X = \mathrm{rot}(B)$ gibt (Übungsaufgabe, Beweis mit dem Lemma von Poincare).

Aus der Gauß-Formel (Satz 9.40) folgt ein weiterer klassischer Integralsatz, nämlich

Satz 9.46 *Sei V^3 eine 3–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ mit Rand $\partial V = M^2$, $\nu = (N_1, N_2, N_3)$ das Vektorfeld der äußeren Normalen auf M^2 und f eine glatte Funktion auf V. Dann gilt*

$$\int\limits_V \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dV^3 = \int\limits_M f \cdot N_i \, dM.$$

Beweis: Wir wenden Satz 9.40 auf das Vektorfeld $X = \frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$ an. Da für dieses Feld $\mathrm{div}(X) = 0$ gilt, erhalten wir

$$\int\limits_V \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dV = \int\limits_{\partial V} f \cdot \langle e_i, \nu\rangle \, d\partial V = \int\limits_M f \cdot N_i \; dM$$

□

Folgerung: *Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $S^2_\varepsilon(x_0)$ die Sphäre um x_0 vom Radius ε, ν die Abbildung der äußeren Normale auf S^2_ε und f eine glatte Funktion auf einer Umgebung von x_0. Dann gilt*

$$\mathrm{grad}\, f(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int\limits_{S^2_\varepsilon} f \cdot \nu \; dS^2_\varepsilon \, .$$

□

9.12 Wiederholungsfragen zur Prüfungsvorbereitung

Die folgenden Fragen fassen den in Kapitel 9 behandelten Stoff zusammen. Sie sollen die Vorbereitung auf die Analysisprüfung erleichtern. Bei der Beantwortung der Fragen sollten Sie folgendes beachten: Zu getroffenen Aussagen sollten Sie Beweise bzw. kurze Beweisideen kennen, mathematische Begriffe sollten Sie an Beispielen bzw. Gegenbeispielen erläutern können. Außerdem sollten Sie den Vorlesungsstoff auf die Lösung von Aufgaben anwenden können (wie in der Übung behandelt bzw. in den wöchentlichen Hausaufgaben gestellt wurden).

1. Definieren Sie den Begriff der Untermannigfaltigkeit (UMF) des $\mathbb{R}^n$ (mit und ohne Rand). Welche Eigenschaften haben das Innere und der Rand einer Untermannigfaltigkeit? Welche Beispiele kennen Sie? Wie kann man Untermannigfaltigkeiten beschreiben (durch Gleichungen, Graphen oder lokale Parametrisierungen)?

2. Definieren Sie den Tangentialraum und den Cotangentialraum einer Untermannigfaltigkeit M in einem Punkt $x \in M$. Welche Eigenschaften haben diese Räume? Wie kann man sie berechnen?

3. Definieren Sie den Begriff einer differenzierbaren (C^k, C^∞) Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten. Welche Eigenschaften haben differenzierbare Abbildungen?

4. Definieren Sie das Differenzial einer differenzierbaren Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten. Welche Eigenschaften hat dieses Differenzial? Warum verallgemeinert es das Differenzial einer differenzierbaren Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wie es in Kapitel 6 definiert wurde?

5. Was versteht man unter der kanonischen Basis im Tangentialraum T_xM bezüglich einer Karte um $x \in M$? Wie erhält man die duale Basis in T_x^*M dazu (Beweis)?. Wie lauten die Transformationsformeln zwischen kanonischen Basen bzw. Cobasen zu verschiedenen Karten?

6. Was versteht man unter einem Vektorfeld auf einer Untermannigfaltigkeit? Definieren Sie die Richtungsableitung einer Funktion nach einem Vektorfeld. Was ist der Kommutator zweier Vektorfelder und welche Eigenschaften hat er?

7. Was versteht man unter der induzierten Riemannschen Metrik einer Untermannigfaltigkeit? Was sind ihre lokalen Koeffizienten? (Beispiele)

8. Definieren Sie die Begriffe Gradient, Divergenz und Laplace-Operator für Funktionen bzw. Vektorfelder einer Untermannigfaltigkeit. Nennen Sie Eigenschaften dieser Operationen (Produktregeln, lokale Formeln).

9. Was versteht man unter einer k-Form auf einer Untermannigfaltigkeit? Welche Operationen für k-Formen kennen Sie (Induzieren, alternierendes Produkt, lokale Darstellung, Differenzial einer k-Form, inneres Produkt, Lie-Ableitung)? Nennen Sie deren wichtigste Rechenregeln.

10. Was versteht man unter einer Orientierung auf einer Untermannigfaltigkeit? Welche Kriterien für die Orientierbarkeit von Untermannigfaltigkeiten kennen Sie? Nennen Sie Beispiele für orientierbare und nicht orientierbare Untermannigfaltigkeiten.

11. Definieren Sie die Volumenform einer orientierten Untermannigfaltigkeit. Welche Eigenschaften hat diese Form (lokale Darstellung, Beziehung zwischen der Volumenform von M und der Volumenform des Randes ∂M)?

12. Definieren Sie das Integral einer n-Form über einer meßbaren Teilmenge einer n-dimensionalen Untermannigfaltigkeit. Welche Eigenschaften hat dieses Integral? Wie kann man es berechnen?

13. Definieren Sie das Volumen einer meßbaren Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit. Geben Sie für die Definition eine geometrische Interpretation. Wie berechnet man dieses Volumen?

14. Formulieren und beweisen Sie den Satz von Stokes (für Integrale von Formen über UMF). Welche Anwendungen kennen Sie?

15. Nennen und beweisen Sie spezielle Integralsätze, die aus dem Satz von Stokes folgen. Welche Eigenschaften des Laplace-Operatores erhält man aus diesen Sätzen?

9.13 Weitere Literatur zur Vorlesung

- Th. Bröcker: Analysis III, Kapitel IV -VI, Wissenschaftsverlag 1992.
- M.P. Do Carmo: Differential forms and applications. Springer, Berlin 1994.
- H. Flanders: Differential forms. With applications to physical sciences. Academic Press, 1963
- O. Forster: Analysis III, Vieweg Verlag 1984
- K. Jänich: Vektoranalyis. Springer 1992
- M. Spivak: Calculus on manifolds. Addison-Wesley, New York 1965

9.14 Übungsaufgaben

Aufgabe 9.1
Zeigen Sie, dass der Zylinder $Z = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \parallel x^2 + y^2 = 1 \}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie lokale Parametrisierungen an, die den Zylinder überdecken.

Aufgabe 9.2
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}^+$ eine C^∞-Funktion. Beweisen Sie, dass die Rotationsfläche

$$M^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = f(z)^2 \}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. (Skizze)

Aufgabe 9.3
Beweisen Sie, dass das Kathenoid

$$M^2 = \{ (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2 \}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. (Skizze)

Aufgabe 9.4

a) Zeigen Sie, dass der Kegel

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \}$$

keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. (Skizze)

b)* Zeigen Sie dass die Neilsche Parabel

$$P = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2 \}$$

keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist. (Skizze)

Aufgabe 9.5
Zeigen sie, dass folgende Gruppen $G \subset gl(\mathbb{R}^n)$ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n^2} \simeq gl(\mathbb{R}^n)$ sind. Bestimmen Sie ferner deren Dimension und die Tangentialräume im Einselement.

a) $G = SL(n, \mathbb{R}) = \{ M \in gl(\mathbb{R}^n) \mid \det M = 1 \}$ (spezielle lineare Gruppe)[1].

b) $G = O(n) = \{ M \in gl(\mathbb{R}^n) \mid M \cdot M^t = id \}$ (orthogonale Gruppe).

Aufgabe 9.6
Betrachte die Wendelfläche

$$M^2 := \{ \Phi(u, v) := (v \cos u, v \sin u, u) \in \mathbb{R}^3 \mid v, u \in \mathbb{R}, v > 0 \}$$

Sei $u_0 \in \mathbb{R}$ fixiert und bezeichne $\varphi(v)$ den Winkel zwischen der Tangentialebene $Tan_{\Phi(u_0,v)}M^2$ und der z-Achse. Beweisen Sie,

$$\varphi(v) = \arctan(|v|)$$

[1] Wird in der Übung besprochen.

Aufgabe 9.7
Sei $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion und $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit M^2 :=graph(h). Zeigen Sie, dass die Tangentialebene durch einen Punkt $p = (u_0, v_0, h(u_0, v_0)) \in M^2$ gegeben ist durch

$$\mathrm{Tan}_p M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x - u_0)\frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) + (y - v_0)\frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0) = z - h(u_0, v_0) \right\}$$

Aufgabe 9.8
Seien $X, Y : S^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$X(x, y, z) = (-y, x, 0), \qquad Y(x, y, z) = (-z, 0, x)$$

a) Zeigen Sie, dass X und Y glatte Vektorfelder auf S^2 sind.

b) Berechnen Sie den Kommutator von X und Y.

c) Geben Sie die Komponenten des Vektorfeldes X bezüglich der durch die sphärischen Koordinaten gegebenen Karte an.

d) Berechnen Sie die Richtungsableitung $X(f)$ für die Funktion $f : S^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = z$.

e) Zeigen Sie: Es existiert keine Funktion $h : S^2 \to \mathbb{R}$ mit $X = \mathrm{grad}(h)$.

Aufgabe 9.9
Seien X, Y, Z Vektorfelder und f, g Funktionen auf einer Untermannigfaltigkeit.
Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften für den Kommutator von Vektorfeldern:

a) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi-Identität)

b) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

c) $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

Aufgabe 9.10

a) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge. Sei $F = (F_1, F_2, F_3) : U \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld auf U, so definieren wir dessen *Rotation* als ein neues Vektorfeld auf U durch

$$\mathrm{rot}(F) := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

Beweisen Sie folgende Formeln, wobei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$:

- $\mathrm{div}\big(\mathrm{rot}(F)\big) = 0$
- $\mathrm{rot}\big(\mathrm{grad}(f)\big) = 0$
- $\mathrm{rot}(f \cdot F) = f \cdot \mathrm{rot}(F) + \mathrm{grad}(f) \times F$

b) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $f, h \in C^\infty(M)$ und $V \in \mathfrak{X}(M)$. Wir definieren den *Laplace-Operator* Δ als

$$\Delta(f) := \operatorname{div}\big(\operatorname{grad}(f)\big)$$

Beweisen Sie die folgenden *Produktregeln*:

- $\operatorname{grad}(f \cdot h) = f \cdot \operatorname{grad}(f) + h \cdot \operatorname{grad}(f)$
- $\operatorname{div}(f \cdot V) = f \cdot \operatorname{div}(V) + V(f)$
- $\Delta(f \cdot h) = f \cdot \Delta(h) + h \cdot \Delta(f) + 2\big\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(h)\big\rangle$

Aufgabe 9.11 (Stereographische Projektion)

a) Bezeichne $N = \{(0, ..., 0, 1)\}$ den Nordpol der Sphäre S^n und sei $h : S^n \setminus N \to \mathbb{R}^n$ die auf folgende Weise definierte Abbildung:

$$h(x) := \big\{ \text{ Gerade durch } N \text{ und } x \big\} \cap \big\{ \text{ Ebene } x_{n+1} = 0 \big\}$$

Geben Sie Formeln für h und h^{-1} und zeigen Sie, dass h^{-1} eine Parametrisierung von $S^n \setminus N$ ist.

b)* Beschreiben Sie das Bild unter h^{-1} von Hyperebenen $E^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ bzw. Hypersphären $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

c) Geben Sie die Koeffizienten der Riemannschen Metrik, den Gradienten einer Funktion $f \in C^\infty(S^n)$, die Divergenz eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(S^n)$ und den Laplace-Operator von f in der durch die stereographische Projektion h gegebenen Karte auf $S^n \setminus N$ an.

Aufgabe 9.12

Bestimmen Sie alle nur vom Abstand zum Nullpunkt $r(x) = d(x, 0) = ||x||$ abhängenden Funktionen $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, die die Gleichung $\Delta f = 0$ erfüllen (harmonische Funktionen).

Aufgabe 9.13

a) Berechnen Sie das äußere Differential folgender Formen im $\mathbb{R}^3$:

1) $\omega^1 = e^x \cos(y)\, dx - e^x \sin(y)\, dy$
2) $\omega^2 = xy\, dx \wedge dy + 2x\, dy \wedge dz + 2y\, dx \wedge dz$
3) $\omega^2 = z\, dx \wedge dy + x\, dy \wedge dz + y\, dx \wedge dz$

b) Sei $\omega^1 = f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ eine 1-Form auf $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie:

$$\omega^1 \ \text{ ist geschlossen } \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Bestimmen Sie alle Funktionen $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ die $d\alpha = \omega^1$ erfüllen, sowie alle 1-Formen η^1 mit $d\eta^1 = y\, dx \wedge dy$.

c) Finden Sie ein analoges Kriterium für Geschlossenheit einer 1-Form auf dem $\mathbb{R}^n$.

d) Sei $\sigma \in \Omega^1\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\big)$ die 1-Form

$$\sigma = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

Beweisen Sie, dass σ geschlossen, aber nicht exakt ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Geben Sie eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ an, auf der σ exakt ist (U möglichst groß!).

Aufgabe 9.14 (Lemma von Poincare)
Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst sternförmig, falls ein Punkt $x_0 \in A$ existiert, so dass $\forall\, x \in A$ auch die Strecke $\overline{x_o x}$ in A liegt. Beweisen Sie:

> Auf einer offenen und sternförmigen Menge U ist jede geschlossene k-Form exakt ($k \geq 1$).

Hinweis: OBdA kann man $x_0 = 0$ wählen. Betrachten Sie die (k-1)-Form I_ω auf U, definiert durch

$$I_\omega(x) := \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \ldots i_k}(tx)\, dt \right) \cdot x_{i_\alpha}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

und zeigen Sie, dass $dI_\omega = \omega$ gilt.

Aufgabe 9.15
Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene sternförmige Menge und X ein Vektorfeld auf U. Beweisen Sie:

$$\mathrm{rot} X = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es existiert } \; f \in C^\infty(U) \; \text{ mit } \mathrm{grad} f = X$$

Hinweis: Wenden Sie Aufgabe 9.14 auf die 1-Form ω_X, definiert durch $\omega_X(Y) = \langle X, Y \rangle$, an.

Aufgabe 9.16 (Maxwell-Gleichungen)
Zur Beschreibung zeitabhängiger elektromagnetischer Vorgänge im Vakuum werden folgende mathematisches Begriffe benutzt:

- $E = \sum\limits_{i=1}^{3} E_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}$ (elektrisches Feld)
- $B = \sum\limits_{i=1}^{3} B_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}$ (magnetisches Feld)
- $\rho(x,t)$ (Ladungsdichte)
- $J = \sum\limits_{i=1}^{3} J_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}$ (Stromdichte)

Die Relationen zwischen diesen Feldern sind durch die experimentell begründeten Maxwell-Gleichungen gegeben, die bei geeigneter Normierung der physikalischen Konstanten folgendes besagen:

(1) $\mathrm{div}(B) = 0$ (B besitzt keine Quelle)

(2) $\mathrm{rot} E + \frac{\partial}{\partial t}(B) = 0$ (Faraday-Gesetz)

(3) $\mathrm{rot} B - J - \frac{\partial}{\partial t}(E) = 0$ (Ampére-Gesetz)

(4) $\mathrm{div} E = \rho$ (Gauss-Gesetz)

Wir setzen $\frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{\partial}{\partial t}$ und betrachten $E, B, J \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$ als glatte Vektorfelder auf $\mathbb{R}^4$ sowie $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Ferner definieren wir für ein Vektorfeld $F = \sum_{i=1}^3 F_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$ und eine 2-Form $\alpha^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$:

1. $\omega_F^1 := \sum_{i=1}^{3} F_i dx^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$

2. $\omega_F^2 := F_1 dx^2 \wedge dx^3 + F_2 dx^3 \wedge dx^1 + F_3 dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$

3. $\delta(\alpha^2) := \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \kappa_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\alpha^2(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\Big) dx^j \qquad \text{wobei } \kappa_i = \begin{cases} -1 & \text{für } i = 1,2,3 \\ 1 & \text{für } i = 4 \end{cases}$

Zeigen Sie dann, dass für die 2-Form $\eta^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ definiert durch

$$\eta^2 := \omega_E^1 \wedge dt + \omega_B^2$$

folgendes gilt:

1. $d\eta^2 = 0 \iff 1)$ und $2)$ (in der Übung behandelt)

2. $\delta\eta^2 = \omega_J^1 - \rho dt \iff 3)$ und $4)$

Aufgabe 9.17
Berechnen Sie die lokale Darstellung der Volumenform für folgende Flächen im $\mathbb{R}^3$:

a) Rotationsfläche
$R_f(a,b) = \{\, \big(f(z)\cos(v), f(z)\sin(v), z\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (v,z) \in \mathbb{R} \times (a,b) \,\}$,
wobei $f \in C^\infty\big((a,b)\big)$ und $f > 0$.

b) Rotationstorus
$T^2 = \{ \big((r_1 + r_2\cos u)\cos v, (r_1 + r_2 \cos u)\sin v, r_2 \sin u\big) \mid (v,u) \in \mathbb{R}^2 \}$,
wobei $r_1 > r_2 > 0$.

c) Wendelfläche
$W = \{\, \big(r\cos v, r \sin v, v\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (v,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \,\}$.

d) Sphäre vom Radius $r > 0$
$S^2(r) = \{\, \big(r \cos v \cos u, r \sin v \cos u, r \sin u\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (v,u) \in \mathbb{R}^2 \,\}$

e) Graph einer Funktion $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
$\Gamma(F) = \{\, \big(u, v, F(u,v)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\}$

Aufgabe 9.18
Beweisen Sie die folgende Formel für die Volumenform auf der Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (wobei S^n durch das nach außen zeigende Normalenvektorfeld orientiert sei) :

$$dS_x^n\,(v_1, \ldots, v_n) = \langle x, v_1 \times \ldots \times v_v\rangle, \quad v_1, \ldots, v_n \in T_x S^n$$

Aufgabe 9.19
Berechnen Sie die Oberflächen der folgenden Flächen:

a) Rotationstorus
$T^2 = \{ \big((r_1 + r_2\cos u)\cos v, (r_1 + r_2 \cos u)\sin v, r_2 \sin u\big) \mid (v,u) \in \mathbb{R}^2 \}$,
wobei $r_1 > r_2 > 0$.

b) Sphäre vom Radius $r > 0$
$S^2(r) = \{ \big(r\cos v\cos u, r\sin v\cos u, r\sin u\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (v,u) \in \mathbb{R}^2 \}$

c) Wendelfläche
$W = \{ \big(r\cos v, r\sin v, v\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (v,r) \in [0,4\pi] \times (0,2) \}$.

d) Kegel
$K := \{(r\cos\theta, r\sin\theta, r) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ 0 \le r \le 1\}$.

Aufgabe 9.20
Berechnen Sie die Fläche des Graphen der Funktion $f : [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$$

Aufgabe 9.21
Bestimmen Sie die Oberflächen der folgenden Rotationsflächen $R_f(a,b)$ (vgl. 11.17a):

- $f(z) = z$, $0 < a < b$.
- $f(z) = e^{-z}$, $(a,b) = (0,\infty)$.
- $f(z) = z^{-\alpha}$, $(a,b) = (1,\infty)$. Für welche $\alpha > 0$ ist die Oberfläche endlich?

Aufgabe 9.22

a) Berechnen Sie das Volumen des *Viviani-Körpers*, also des Durchschnitts des Vollzylinders
$Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \frac{R}{2})^2 + y^2 \le (\frac{R}{2})^2\}$ mit der Kugel $B^3 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der *Viviani-Fläche*, also des Durchschnitts des Vollzylinders
Z wie in a) mit der Sphäre $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

Aufgabe 9.23
Es sei $K = R_{\cosh^2 z}(-\infty, +\infty)$ das Katenoid und T^2 der Rotationstorus. Berechnen Sie folgende Integrale:

$$a) \int\limits_K \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dK \qquad und \qquad b) \int\limits_{T^2} z\, dx \wedge dy.$$

Aufgabe 9.24
Sei $\eta = z^2\, dx \wedge dy$ eine 2-Form im $\mathbb{R}^3$, und sei $\overline{S} = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > 0\}$ die obere Hälfte der orientierten Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\overline{S}} \eta$$

Aufgabe 9.25
Sei S die orientierte Fläche $S := \{(u+v, u^2 - v^2, u \cdot v) \mid u, v \in [0,1]\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_S x\,dy \wedge dz + y\,dx \wedge dy$$

Aufgabe 9.26
Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_E \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\; dE\ ,$$

wobei E die Ellipsoidfläche $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ bezeichne.

Aufgabe 9.27
T sei der Körper, der durch die xy-Ebene, die xz-Ebene, die yz-Ebene und die Ebene $2x + 3y + 6z = 12$ begrenzt ist. Berechnen Sie

$$\int\limits_{\partial T} F_1\,dx \wedge dy + F_2\,dy \wedge dz + F_3\,dz \wedge dx$$

direkt und nach dem Satz von Stokes[2] für:

a) $F_1 = 3y, F_2 = 18z, F_3 = -12$

b) $F_1 = z, F_2 = x^2, F_3 = y$

Aufgabe 9.28
Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{F} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ mit $\mathbf{F}(x,y,z) := (2x, y^2, z^2)$. Ferner bezeichne $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-dimensionale Sphäre vom Radius 1. $\mathbf{n}$ sei das Vektorfeld der äußeren Normalen. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes das Integral

$$\int_{S^2} < \mathbf{F}, \mathbf{n} > dS^2$$

Aufgabe 9.29
Berechnen Sie mit Hilfe des Stokesschen Satzes das Integral

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

C ist die Schnittmenge des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ mit der Ebene $x + y + z = 1$, die Orientierung enspricht der Bewegung gegen den Uhrzeigersinn in der xy-Ebene.

[2]**Bemerkung:** ∂T ist KEINE glatte Untermannigfaltigkeit, lässt sich aber aus solchen zusammengesetzten. Der Satz von Stokes darf hier trotzdem angewendet werden indem man das Integral $\int_{\partial T}$ für die einzelnen glatten Randstücke berechnet.

Aufgabe 9.30
Verifizieren Sie den Stokesschen Integralsatz für die Fläche $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ und das Vektorfeld $X(x, y, z) = (x, y, z)$, d.h. zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass gilt

$$\int_B \operatorname{rot}(X) \cdot d\vec{F} = \int_{\partial B} X \cdot d\vec{s}.$$

Aufgabe 9.31
Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein ebenes beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂D. Mit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \partial D$ bezeichnen wir die einfache, reguläre, auf Bogenlänge parametrisierte Kurve, die den Rand von D in Richtung seiner Orientierung parametrisiert. Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt $Area(D) := \lambda_2(D)$ des Gebietes D folgende Formel gilt:

$$Area(D) = \frac{1}{2} \int_a^b \big(x(t)\, y'(t) - y(t) x'(t)\big)\, dt \qquad \text{, wobei} \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$