Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 2

Analysis I* – WS 11/12

Abgabe am 1.11.2011

Aufgabe 5
Es sei $[\mathbb{K}, +, \cdot]$ ein angeordneter Körper (aus mindestens 2 Elementen), $0 \in \mathbb{K}$ bezeichne das neutrale Element der Addition und $1 \in \mathbb{K}$ das neutrale Element der Multiplikation. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ die folgenden Rechenregeln gelten:

a) $0 \cdot a = 0$.

b) $(-1) \cdot a = -a$.

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

d) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$.

e) $1 > 0$.

f) Aus $b > 0$ folgt $\frac{1}{b} > 0$.

6 P

Aufgabe 6
Sei $[\mathbb{K}, +, \cdot]$ ein angeordneter Körper und $A \subset \mathbb{K}$ eine nichtleere, endliche Teilmenge von $\mathbb{K}$. Beweisen Sie, dass A ein kleinstes und ein größtes Element enthält. D.h. es existieren $x_{min} \in A$ und $x_{max} \in A$, so dass $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ für alle $x \in A$.
(Hinweis: Führen Sie den Beweis durch vollständige Induktion über die Anzahl der Elemente von A). **3 P**

Aufgabe 7

a) Untersuchen Sie, ob die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = n^2 + 1\}$$

nach oben bzw. nach unten beschränkt ist und bestimmen Sie ggf. das Supremum bzw. das Infimum. Sind dies Maxima bzw. Minima von M ?

b) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^+$ beschränkte Mengen positiver reeller Zahlen und sei

$$A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Zeigen Sie

$$\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B.$$

c) Seien $A_i \subset \mathbb{R}$, $i \in \Lambda$, beliebig viele beschränkte Mengen und sei $\bigcup\limits_{i \in \Lambda} A_i \subset \mathbb{R}$ ebenfalls beschränkt. Wie verhalten sich die folgenden Suprema zueinander ?

$$\sup \{ \sup A_i \mid i \in \Lambda\} \qquad \text{und} \qquad \sup \Big(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i \Big).$$

2+2+2 P

Aufgabe 8
Beweisen Sie, dass in jedem offenen Intervall $(x, y) \subset \mathbb{R}$ eine **irrationale** Zahl liegt. **3 P**

Insgesamt: **18 P**

Die Übungsaufgaben zu dieser Vorlesung erscheinen Dienstags auf der homepage

`http://www.mathematik.hu-berlin.de/~baum`

auf der Seite für die Vorlesung Analysis I* (unter der Rubrik Lehre). Die Abgabe der Lösungen erfolgt am darauf folgenden Dienstag

vor Beginn der Vorlesung von 9:00 - 9:10.

Es liegen entsprechende Mappen im Vorlesungsraum aus. **Nach Beginn der Vorlesung um 9:15** werden keine Lösungen mehr angenommen !!.

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikel-Nummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe.