



# Übungsblatt 3

## Analysis I\* – WS 11/12

Abgabe am 8.11.2011

---

### Aufgabe 9

1. Wir betrachten  $n$  abzählbare Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  und setzen

$$A := A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_j \in A_j, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Entscheiden Sie, ob  $A$  abzählbar oder überabzählbar ist (mit Beweis).

2. Es seien  $B_k, k \in \mathbb{N}$ , abzählbare Mengen. Entscheiden Sie, ob

$$B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$$

abzählbar oder überabzählbar ist (mit Beweis).

3. Sei  $M$  eine unendliche Menge. Zeigen Sie, dass eine abzählbare Menge  $M_0 \subset M$  existiert, so dass  $M \setminus M_0$  zu  $M$  gleichmächtig ist.

**2+2+2 P**

### Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}^+$  und  $n \in \mathbb{N}$  die folgenden Ungleichungen gelten:

- a)  $\sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$ ,
- b)  $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \leq \sqrt[n]{|x-y|}$ ,
- c)  $\frac{x-1}{n} \geq \sqrt[n]{x} - 1$ .

**2+2+2 P**

### Aufgabe 11

Seien  $a_1, \dots, a_n$  positive reelle Zahlen. Zeigen Sie die folgende Ungleichung für das geometrische und das arithmetische Mittel dieser Zahlen:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}_{\text{arithmetisches Mittel}}.$$

**3 P**

### Aufgabe 12

1. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form  $a + ib$  dar:

$$\frac{2+i}{1-3i}, \quad (1+\sqrt{3}i)^6, \quad \left(\frac{1+3i}{1-i}\right)^4.$$

2. Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen die trigonometrische Darstellung:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{1-i}{1+i}, \quad (-4+3i)^3.$$

3. Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene:

(a)  $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$ ,

(b)  $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-i| < 2\}$ ,

(c)  $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\}$ .

**3+3+3 P**

Insgesamt: **24 P**

Die Übungsaufgaben zu dieser Vorlesung erscheinen Dienstags auf der homepage

<http://www.mathematik.hu-berlin.de/~baum>

auf der Seite für die Vorlesung Analysis I\* (unter der Rubrik Lehre). Die Abgabe der Lösungen erfolgt am darauf folgenden Dienstag

**vor Beginn der Vorlesung von 9:00 - 9:10.**

Es liegen entsprechende Mappen im Vorlesungsraum aus. **Nach Beginn der Vorlesung um 9:15** werden keine Lösungen mehr angenommen !!.

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt, versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikel-Nummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (gemeint ist eine der Nummern 1-6 entsprechend der Einteilung der Übungsgruppen auf unserer homepage.)