



Übungsblatt 4

Analysis I* – WS 11/12

Abgabe am 15.11.2011

Aufgabe 13

Beweisen Sie, dass für zwei komplexe Zahlen z und w das folgende *Parallelogramm-Gesetz* gilt:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Was bedeutet diese Formel geometrisch?

3 P

Aufgabe 14

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei für $x, y \in X$

$$d^*(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \text{und}$$

$$\tilde{d}(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}.$$

- Beweisen Sie, dass (X, d^*) und (X, \tilde{d}) metrische Räume sind.
- Untersuchen Sie, wie die ϵ -Kugeln von (X, d^*) und von (X, \tilde{d}) für den Fall $X = \mathbb{C}$ und $d(x, y) := |x - y|$ aussehen.

4+2 P

Aufgabe 15

Wir betrachten den metrischen Raum (\mathbb{C}, d) mit $d(z, w) := |z - w|$ und die Abbildung

$$\phi : z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mapsto \frac{-iz + 1}{z - i} \in \mathbb{C}.$$

- Zeichnen Sie die Kugel $K(0, 1) := \{z \in \mathbb{C} \mid d(0, z) < 1\} \subset \mathbb{C}$.
- Bestimmen Sie das Bild dieser Kugel unter der Abbildung ϕ , d.h. $\phi(K(0, 1)) \subset \mathbb{C}$.
- Bestimmen Sie $\text{Int}(A)$, $\text{cl}(A)$ und $\partial(A)$ für $A := \phi(K(0, 1))$.
- Entscheiden Sie, ob die Abbildung ϕ injektiv ist (mit Beweis).

1+2+2+2 P

Aufgabe 16

Sei (X, d) ein metrischer Raum und bezeichne $\text{cl}(A)$ den Abschluss der Teilmenge $A \subset X$. Beweisen Sie folgende Eigenschaften des Abschlusses:

- $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$ und $\text{cl}(X) = X$.
- $A \subset \text{cl}(A)$.
- $A \subset B \implies \text{cl}(A) \subset \text{cl}(B)$.
- $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$.
- $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$.
- Seien $A_i, i \in \Lambda$, beliebig viele Teilmengen von X . Dann gilt

$$\text{cl}\left(\bigcap_{i \in \Lambda} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in \Lambda} \text{cl}(A_i).$$

6 P

Insgesamt: 22 P