Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 5

Analysis I* – WS 11/12

Abgabe am 22.11.2011

Aufgabe 17

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie:

a) $Int(A)$ ist die 'größte' offene Menge, die in A enthalten ist, d.h. es gilt:

$$Int(A) = \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ offen}}} U \,.$$

b) $cl(A)$ ist die 'kleinste' abgeschlossene Menge, die A enthält, d.h. es gilt:

$$cl(A) = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ abgeschlossen}}} F \,.$$

3+3 P

Aufgabe 18

1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte von A sowie der Rand von A abgeschlossen sind. Gilt dies auch für die Menge der isolierten Punkte von A?
2. Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(x, y) := |x - y|$. Zeigen Sie:

   a) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so gilt $sup(A) \in cl(A)$.

   b) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so gilt $inf(A) \in cl(A)$.

   Unter welchen Bedingungen ist $sup(A)$ im Fall a) bzw. $inf(A)$ im Fall b) ein Häufungspunkt bzw. ein Randpunkt von A?

4+4 P

Aufgabe 19

Eine komplexe Zahl $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt *algebraisch*, wenn es ein Polynom

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

vom Grad $n > 0$ mit *ganzzahligen* Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gibt, so dass $P(z_0) = 0$ gilt. Wir betrachten $\mathbb{C}$ mit der Standardmetrik $d(z, w) = |z - w|$. Zeigen Sie:

1. $\mathbb{Q}(i) := \{q + ip \mid p, q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$ ist eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$.
2. Die Menge der algebraischen Zahlen liegt dicht in $\mathbb{C}$.

3+3 P

Aufgabe 20

Sei (X, d) ein metrischer Raum und d^* die Metrik $d^*(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ auf X. Sei des Weiteren (x_n) eine Folge in X und $x \in X$. Zeigen Sie:

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{in} \quad (X, d) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{in} \quad (X, d^*)$.
2. Die Menge der Häufungspunkte der Folge (x_n) stimmt für beide Metriken überein.
3. Die Menge der Häufungspunkte einer Folge in einem metrischen Raum ist abgeschlossen.

6 P

Insgesamt: **26 P**