Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 6

Analysis I* – WS 11/12

Abgabe am 29.11.2011

Hinweis: Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind **Zusatzaufgaben**. Sie sind **NICHT** schwerer als diejenigen ohne *. Sie können durch Lösen dieser Zusatzaufgaben **zusätzliche** Punkte erwerben, um Ihren Punktestand bei den Übungsaufgaben aufzubessern. Diese Möglichkeit sollten vor allem diejenigen Studenten nutzen, die zur Zeit die erforderlichen 50% der Punkte für die Prüfungszulassung noch nicht oder nur knapp erreicht haben.

In den folgenden Aufgaben betrachten wir Folgen reeller bzw. komplexer Zahlen. Dabei seien $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit der Standardmetrik $d(z,w) := |z-w|$ versehen.

Aufgabe 21
Untersuchen Sie, ob die folgenden Folgen reeller bzw. komplexer Zahlen konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit Beweis !):

a) $a_n := \frac{n^4+3n^2+3n+1}{5n^4+2}$.

b) $b_n := \frac{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}{1+2\sqrt{n}}$.

c) $c_n := \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2n}$.

d) $d_n := (-1)^n \sqrt[n]{n} + \frac{n^3}{4^n}$.

e) $e_n := \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3}$.

f) $f_n := \sqrt[n]{n!}$.

g) $g_n := \frac{z^n}{n!}$, wobei $z \in \mathbb{C}$.

1+1+1+1+2+2+2 =10 P

Aufgabe 22

1. Seien x_1 und c positive reelle Zahlen und (x_n) die folgende rekursiv definierte Folge:
$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) gegen $\sqrt{c}$ konvergiert.

2* Seien $c > 1$ und $x_1 = 1$ und (x_n) die folgende rekursiv definierte Folge:
$$x_{n+1} := \sqrt{c\,x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) gegen c konvergiert.

4+4* P

Aufgabe 23 e bezeichne die Euler-Zahl.

1* Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = e.$

2. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$

3. Sei (q_n) eine Folge positiver rationaler Zahlen, die gegen $+\infty$ strebt. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

3*+3+4 P

Aufgabe 24

1. Sei (a_n) eine konvergente Folge reeller Zahlen mit dem Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mittel ebenfalls gegen a konvergiert, d.h. dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen:

a) $x_n := \frac{1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

b) $y_n := \frac{x+\sqrt[2]{x}+\sqrt[3]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x}}{n}$, wobei $x \in \mathbb{R}^+$.

2* Sie (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen und gelte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = x.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen:

a) $x_n := \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

b) $y_n := \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}$.

4+1+1+4*+3*+3* = 6 + 10* P

Insgesamt: 27 Punkte + 17 mögliche Zusatzpunkte