Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 7

Analysis I* – WS 11/12

Abgabe am 6.12.2012

Aufgabe 25
Wir betrachten auf der Menge der natürlichen Zahlen die Funktion $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$d(n,m) := \frac{|n-m|}{nm}\,, \qquad n,m \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, d)$ ein metrischer Raum ist.
b) Entscheiden Sie, ob $(\mathbb{N}, d)$ vollständig ist (mit Beweis).
c) Bestimmen Sie alle offenen, alle abgeschlossenen, und alle kompakten Teilmengen von $(\mathbb{N}, d)$.

6 P

Aufgabe 26
Sei X eine nichtleere Menge. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine reelle Konstante C gibt, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in X$. Wir bezeichnen mit $B(X)$ die Menge aller reellwertigen, beschränkten Funktionen auf X,

$$B(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$$

und mit $d_\infty : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$d_\infty(f,h) := \sup\{\, |f(x) - h(x)| \mid x \in X\}.$$

a) Zeigen Sie, dass d_∞ korrekt definiert ist (d.h., dass das Supremum existiert).
b) Zeigen Sie, dass d_∞ eine Metrik auf $B(X)$ ist.
c) Zeigen Sie, dass der metrische Raum $(B(X), d_\infty)$ vollständig ist.

6 P

Aufgabe 27
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie:

a) Die Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen von X ist kompakt.
b) Der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Teilmengen von X ist kompakt.

Kann man die Voraussetzung *endlich viele* in Punkt a) durch *abzählbar viele* oder *beliebig viele* ersetzen? (Begründen Sie Ihre Antwort).

4 P

Aufgabe 28

Diese Aufgabe beschreibt eine Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips, das wir für die reellen Zahlen bereits kennen (Satz 8, Kapitel 1)

Unter dem Durchmesser einer Teilmenge A eines metrischen Raumes (X,d) versteht man die Zahl

$$diam(A) := \begin{cases} \sup\{d(a,b) \mid a,b \in A\} & \text{falls das Supremum existiert,} \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und (F_n) eine Familie nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von X mit

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset F_4 \supset \ldots \quad \text{und} \quad diam(F_n) \longrightarrow 0.$$

Zeigen Sie, dass genau ein $x \in X$ existiert mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}.$$

Hinweis: *Wählen Sie in jeder Menge F_n einen Punkt x_n und zeigen Sie dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist. Der Grenzwert dieser Cauchy-Folge ist dann der gesuchte Punkt x.* **4 P**

Insgesamt: **20 P**