Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 8

Analysis I* – WS 11/12

Abgabe am 13.12.2011

Hinweis: Vektorräume und ihre Untervektorräume wurden in der Vorlesung Lineare Algebra I* behandelt. Diejenigen Studenten, die diese Vorlesung nicht hören und diese Begriffe nicht kennen, lesen sich bitte die entsprechenden Definitionen in einem Lehrbuch über Lineare Algebra durch, z.B. in *Gerd Fischer: Lineare Algebra, Vieweg-Verlag.*

Aufgabe 30
Sei E ein reeller Vektorraum. Zeigen Sie:

1. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf E und $\| \cdot \|$ die dadurch definierte Norm auf E, d.h. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für alle $x \in E$. Dann gilt das *Parallelogramm-Gesetz*
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \forall\, x, y \in E \qquad (*)$$
2. Ist andererseits $\| \cdot \|$ eine Norm auf E, die das Parallelogrammgesetz $(*)$ erfüllt, so existiert ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für alle $x \in E$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass man das gesuchte Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aus der Norm mittels
$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$
erhält.

Erfüllt jede Norm das Parallelogrammgesetz $(*)$? (Begründen Sie Ihre Antwort). **6 P**

Aufgabe 31
Für einen Vektor $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und eine positive rationale Zahl p definieren wir:
$$\|x\|_p := \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Seien nun p und q zwei positive rationale Zahlen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Zeigen Sie unter Benutzung der Ungleichung
$$\boxed{a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}^+} :$$

Für alle $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |y_k| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$ (*Hölder-Ungleichung*),

b) $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ (*Minkowski-Ungleichung*).

6 P

Aufgabe 32
Es sei p eine rationale Zahl mit $p \geq 1$. Wir betrachten die Abbildungen $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &:= max\{|x_k| \mid k = 1, \ldots, n\}, \\ \|x\|_p &:= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_p$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind.
(*Hinweis: Sie können die Minkowski-Ungleichung aus Aufgabe 31 benutzen*).

b) Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Folge der reellen Zahlen $(\|x\|_m)_{m=1}^\infty$. Zeigen Sie:

$$\lim_{m\to\infty} \|x\|_m = \|x\|_\infty.$$

6 P

Aufgabe 33
Sei $\mathcal{F}$ der Vektorraum der reellen Folgen und ℓ^2 die Teilmenge

$$\ell^2 = \{(x_k) \in \mathcal{F} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}.$$

1. Zeigen Sie, dass ℓ^2 ein Untervektorraum des Vektorraumes $\mathcal{F}$ ist.
2. Für $(x_k), (y_k) \in \ell^2$ sei

$$\begin{aligned} \|(x_k)\|_2 &:= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \\ \langle (x_k), (y_k) \rangle &:= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot y_k. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_2$ eine Norm und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf ℓ^2 ist.
   Hinweis: Für das Skalarprodukt müssen Sie insbesondere zeigen, dass die definierende Reihe konvergiert.
3. Zeigen Sie, dass $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum und $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum ist.

Bemerkung: Analog definiert man für rationale Zahlen $p \geq 1$ die Untervektorräume $\ell^p \subset \mathcal{F}$ mit der Norm $\|\cdot\|_p$ und erhält weitere Banachräume $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$. **6 P**

Insgesamt: **24 P**