Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 10

Analysis I* – WS 11/12

Abgabe am 10.1.2012

Aufgabe 38
Zeigen Sie, das für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

4 P

Aufgabe 39
Sei (a_k) eine Folge positiver reeller Zahlen und bezeichne für jede natürliche Zahl $k > 1$

$$L_k := -\frac{\ln a_k}{\ln k}.$$

Zeigen Sie:

a) Gilt $\liminf\limits_{k\to\infty} L_k > 1$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

b) Existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so dass $L_k \leq 1$ für alle $k \geq k_0$, so divergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

6 P

Aufgabe 40
Es sei α eine positive reelle Zahl. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha^{\ln k}$,

b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \alpha^{\ln\ln k}$,

c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(\ln k)^\alpha}$,

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{k}$.

Hinweis: Für a) und b) können Sie das Kriterium aus Aufgabe 39 benutzen und für c) das Cauchysche Verdichtungskriterium. Für d) eignet sich das Majorantenkriterium und die Abschätzung von $\ln(1+x)$ *aus der Übung.*

8 P

Aufgabe 41
Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die die folgenden Gleichungen lösen:

a) $2^{(3^x)} = 3^{(4^x)}$.

b) $2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) = 2$.

4 P

Insgesamt: **22 P**