

# Übungsblatt 11

## Analysis I\* – WS 11/12

Abgabe am 17.1.2012

---

### Aufgabe 42

a) Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender komplexer Funktionen:

(i)  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^n - 1}{z^m - 1}$  für  $n, m \in \mathbb{N}$ .

(ii)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^r}$  für  $r \in \mathbb{R}$ .

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender reeller Funktionen:

(i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x + 5})$ .

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x + (x - [x])^2]$ , wobei für eine reelle Zahl  $y$  das Symbol  $[y]$  die größte ganze Zahl  $k$  mit  $k \leq y$  bezeichnet.

4 P

### Aufgabe 43

Seien  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $f, h : X \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Abbildungen. Wir definieren die Abbildungen  $\max\{f, h\} : X \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\min\{f, h\} : X \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\begin{aligned}\max\{f, h\}(x) &:= \max\{f(x), h(x)\}, & x \in X, \\ \min\{f, h\}(x) &:= \min\{f(x), h(x)\}, & x \in X.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass  $\max\{f, h\}$  und  $\min\{f, h\}$  stetige Abbildungen sind.

4 P

### Aufgabe 44

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^4 - 10x^2 + 8}{x^2 - 4x + 3} & \text{falls } x \neq 1 \text{ und } x \neq 3 \\ A & \text{falls } x = 1 \\ B & \text{falls } x = 3 \end{cases}$$

Können  $A$  und  $B$  so gewählt werden, dass  $f$  stetig ist?

4 P

### Aufgabe 45

Untersuchen Sie, in welchen Punkten von  $\mathbb{R}$  die folgenden Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind und bestimmen Sie den Typ der auftretenden Unstetigkeitsstellen:

a)  $f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

b)  $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

4 P

Insgesamt: 16 P