Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

# Übungsblatt 12

## Analysis I* – WS 11/12

### Abgabe am 24.1.2012

---

**Aufgabe 46**

Sei $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Zeigen Sie, dass für jede Cauchy-Folge $(x_n)$ in $X$ die Bildfolge $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge in $Y$ ist.
Gilt dies auch für stetige Abbildungen $f$? (Begründen Sie Ihre Meinung). **4 P**

**Aufgabe 47**

Wir betrachten die Logarithmus-Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig.

b) Für jede positive reelle Zahl $a$ ist $\ln|_{[a,+\infty)} : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

c) Ist $\ln|_{[a,+\infty)} : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig?

**6 P**

**Aufgabe 48**

Sei $P(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ und $a_n \neq 0$. Zeigen Sie (mit Methoden der bisherigen Analysis-Vorlesung):

a) Ist $n$ ungerade, so hat $P$ mindestens eine reelle Nullstelle.

b) Ist $n$ gerade und $a_0 a_n < 0$, so hat $P$ mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen.

**4 P**

**Aufgabe 49**

a) Sei $X$ ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine bogenzusammenhängende Teilmenge. Zeigen Sie, dass $A$ zusammenhängend ist.

b*) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende und *offene* Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (mit der Euklidischen Metrik). Zeigen Sie, dass $A$ bogenzusammenhängend ist.

c*) Geben Sie ein Beispiel für eine zusammenhängende, nicht bogenzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ an (mit Beweis).

*Hinweis: Die Aufgaben 49b* und 49c* sind etwas schwieriger. Die Lösung ist freiwillig, die Punkte werden zusätzlich gezählt.* **4 + 4* + 4* P**

Insgesamt: **18 + 8* P**