

# Übungsblatt 13

## Analysis I\* – WS 11/12

Abgabe am 31.1.2012

---

### Aufgabe 50

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen zwei Mengen. Dann heißt die Menge

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

der *Graph von  $f$* .

Sei nun  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Zeigen Sie:

- Die Menge  $\text{graph}(f) \subset X \times Y$  ist abgeschlossen. ( $X \times Y$  sei dabei mit der Produktmetrik versehen).
- Ist der metrische Raum  $X$  kompakt, so ist  $\text{graph}(f) \subset X \times Y$  ebenfalls kompakt.

4 P

### Aufgabe 51

Es sei  $\|\cdot\|$  die Euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$  und  $K(x_0, r)$  die Kugel um  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  vom Radius  $r > 0$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung  $f : K(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$f(x) := \frac{x - x_0}{r - \|x - x_0\|},$$

ein Homöomorphismus ist.

4 P

### Aufgabe 52

Es sei  $K \subset \mathbb{R}$  eine kompakte Menge und  $f : K \rightarrow K$  eine Abbildung mit

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in K \text{ mit } x \neq y.$$

Dann besitzt  $f$  genau einen Fixpunkt.

4 P

### Aufgabe 53

Wir gehen davon aus, dass die Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche stetig ist. Zeigen Sie, dass es zu jedem Zeitpunkt zwei diametral gegenüberliegende Orte auf der Erdoberfläche gibt, die die gleiche Temperatur haben.

*Hinweis: Wir betrachten die Erde in dieser Aufgabe näherungsweise als Kugel.*

4 P

Insgesamt: 16 P