

Übungsblatt 14

Analysis I* – WS 11/12

Abgabe am 7.2.2012

Aufgabe 54

Sei $f_n : X \rightarrow E$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine Folge von Funktionen von einem metrischen Raum X in einen Banachraum E . Zeigen Sie: Ist die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent, so konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig gegen die Null-Funktion $f = 0$. **4 P**

Aufgabe 55

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. Funktionenreihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

a) (f_n) mit $f_n(x) := \arctan(nx)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, wobei $\alpha > 1$ eine fixierte reelle Zahl ist.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

6 P

Aufgabe 56

Untersuchen Sie, für welche ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ die Grenzwerte der folgenden komplexen Funktionen existieren und geben Sie diese ggf. an:

a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sinh(z)}{z^k}$,

b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cosh(z) - 1}{z^k}$,

c) $\lim_{z \rightarrow 0} z^k \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

6 P

Aufgabe 57

Beweisen Sie die folgenden Beziehungen zwischen den Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen und der Logarithmusfunktion:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in \mathbb{R}, x \geq 1,$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x \in \mathbb{R}, |x| < 1,$$

$$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad x \in \mathbb{R}, |x| > 1.$$

4 P

Insgesamt: **20 P**