Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Zusatzaufgaben Blatt 1

Analysis I* – WS 11/12

Besprechungstermin in der Woche vom 7.11.-11.11.2011

Hinweis: Diese Aufgaben sind ein zusätzliches Angebot für Höhrer der Analysis I*-Vorlesung, die sich über den Vorlesungsstoff hinaus noch etwas mit analytischen Themen befassen möchten. Die Lösungen werden nicht abgegeben und korrigiert. Für Interessenten vereinbaren wir aber einen Besprechungstermin, bei dem die Lösungen besprochen werden. Dabei können Sie z.B. vorstellen, was Sie herausbekommen haben bzw. zusätzlich beim Lesen in der Literatur entdeckt haben.
Interessenten für einen Besprechungstermin melden sich bitte zur Terminabsprache bei mir.

Geometrische Eigenschaften von Möbiustransformationen

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $ad - cb \neq 0$. Wir ordnen diese Zahlen in einer Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ an und bezeichnen mit $\phi_A : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid cz + d = 0\} \to \mathbb{C}$ die Abbildung

$$\phi_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}.$$

Eine solche Abbildung heißt *Möbiustransformation*. Das Ziel dieser Zusatzaufgaben ist die Untersuchung einiger geometrischer Eigenschaften dieser Sorte von Abbildungen.

1. Jede Möbiustransformation läßt sich als Verknüpfung von Translationen, Drehstreckungen und Inversion darstellen.

$$\begin{array}{lll} -\textit{Translation}: & T_{z_0} : z \in \mathbb{C} \mapsto z + z_0 \in \mathbb{C}\,, & \text{wobei } z_0 \in \mathbb{C}. \\ -\textit{Drehstreckung}: & S_\lambda : z \in \mathbb{C} \mapsto \lambda z \in \mathbb{C}\,, & \text{wobei } \lambda \in \mathbb{C}. \\ -\textit{Inversion}: & J : z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}\,. & \end{array}$$

2. Jede Möbiustransformation überführt verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise. (*Unter einem verallgemeinerten Kreis verstehen wir hier einen Kreis oder eine Gerade*).

3. Jede Möbiustransformation ist winkeltreu, d.h. wenn sich zwei Kurven Γ_1 und Γ_2 der komplexen Ebene im Punkt $p \in \mathbb{C}$ im Winkel α schneiden, so schneiden sich die Bildkurven $\phi_A(\Gamma_1)$ und $\phi_A(\Gamma_2)$ im Punkt $\phi_A(p)$ im gleichen Winkel.
(*Informieren Sie sich in der Literatur, wie man den Schnittwinkel zwischen Kurven analytisch definiert oder argumentieren Sie geometrisch*).

4. Eine von der Identität verschiedene Möbiustransformation hat höchstens 2 Fixpunkte.
(*Unter einem Fixpunkt von ϕ_A versteht man einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $\phi_A(z) = z$*).

5. Sei $H := \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene. Geben Sie eine Möbiustransformation an, die die obere Halbebene H bijektiv auf die Kreisscheibe D abbildet, so dass i auf 0 und

der Rand von H auf den Rand der Kreisscheibe D abgebildet werden.

6. Zeígen Sie, dass eine Möbiustransformation ϕ_A mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc > 0$ die obere Halbebene H in sich überführt.
Zeigen Sie außerdem, dass die Menge G dieser Möbiustransformationen auf H, d.h.

$$G := \{\phi : z \in H \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in H \ \mid \ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc > 0\}$$

eine Gruppe bilden.
(*Informieren Sie sich in der Literatur über den Begriff der Gruppe, falls der Begriff in der VL zur linearen Algebra noch nicht behandelt wurde.*)

7. Sei $\xi \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|\xi| = 1$ und $a \in D$. $\psi_{\xi,a}$ bezeichne die Möbiustransformation

$$\psi_{\xi,a}(z) := \xi \frac{z-a}{\bar{a}z - 1}.$$

Zeigen Sie, dass $\psi_{\xi,a}$ die Kreisscheibe D in sich überführt und dass die Menge G_1 aller dieser Möbiustransformationen auf D, d.h.

$$G_1 := \{\psi_{\xi,a} : D \to D \ \mid \ \xi \in \mathbb{C}, |\xi| = 1, a \in D\}$$

ebenfalls eine Gruppe bilden.

8. Informieren Sie sich in der Literatur über Anwendungen der Möbiustransformationen in der hyperbolischen Geometrie.

Literaturempfehlung:

1. J. W. Anderson: Hyperbolic Geometry. Springer-Verlag, 2. Edition 2005

2. T. Needham: Anschauliche Funktionentheorie. Oldenbourg-Verlag 2001.
   (*Nicht allzu exakt geschrieben, aber sehr anschaulich und mit vielen Hinweisen auf interessante Anwendungen*).