



# Zusatzaufgaben Blatt 2

Analysis I\* – WS 11/12

Besprechungstermin in der Woche vom 28.11.-02.12.2011

---

**Hinweis:** Diese Aufgaben sind ein zusätzliches Angebot für Hörer der Analysis I\*-Vorlesung, die sich über den Vorlesungsstoff hinaus noch etwas mit analytischen Themen befassen möchten. Die Lösungen werden nicht abgegeben und korrigiert. Für Interessenten vereinbaren wir aber einen Besprechungstermin, bei dem die Lösungen besprochen werden. Dabei können Sie z.B. vorstellen, was Sie herausbekommen haben bzw. zusätzlich beim Lesen in der Literatur entdeckt haben.

Interessenten für einen Besprechungstermin melden sich bitte zur Terminabsprache bei mir.

## Topologische Räume

In der Analysis spielen Konvergenz und Grenzwerte von Folgen eine entscheidende Rolle, um das lokale Änderungsverhalten von Objekten zu beschreiben. In der Vorlesung haben wir die metrischen Räume kennengelernt, in denen man einen Konvergenzbegriff mit Hilfe der Abstandsfunktion erklären kann. Bei der mathematischen Modellierung verschiedener Sachverhalte trifft man allerdings oft auf mathematische Strukturen, in denen man Konvergenz benötigt, die aber keine geeignete Metrik zulassen. Besonders häufig tritt dies z.B. auf, wenn man eine Äquivalenzrelation auf einem (metrischen) Raum hat und deren Äquivalenzklassen betrachtet. (Sie können sich dies als "Verklebevorschrift" vorstellen, die eine neue Menge produziert). Man benötigt deshalb ein allgemeineres mathematisches Konzept für die Definition von Konvergenz als das des *metrischen* Raumes. Das allgemeinste Konzept dafür ist das des *topologischen* Raumes. Dieses Zusatzblatt soll die topologischen Räume vorstellen und einige Unterschiede zu den metrischen Räumen beleuchten.

**Definition:** Ein Paar  $(X, \tau)$ , bestehend aus einer nichtleeren Menge  $X$  und einer Teilmenge  $\tau$  der Potenzmenge von  $X$ , heißt *topologischer Raum*, wenn das Mengensystem  $\tau$  die folgenden drei Eigenschaften hat:

1.  $X$  und  $\emptyset$  sind Elemente von  $\tau$ .
2. Die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus  $\tau$  liegt in  $\tau$ .
3. Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus  $\tau$  liegt in  $\tau$ .

Das Mengensystem  $\tau \subset \mathcal{P}(X)$  heißt *Topologie* auf  $X$ . Die Teilmengen von  $X$ , die zu  $\tau$  gehören, heißen *die offenen Mengen* des topologischen Raumes  $(X, \tau)$ .

Die drei Eigenschaften aus dieser Definition kommen Ihnen sicher bekannt vor. Ist nämlich  $(X, d)$  ein metrischer Raum und definieren wir  $\tau_d \subset \mathcal{P}(X)$  durch

$$\tau_d := \{A \subset X \mid \forall x \in A \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } K(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset A\},$$

so ist  $\tau_d$  eine solche Topologie auf  $X$  (siehe Satz 2.4 der Vorlesung). Wir hatten die Mengen aus  $\tau_d$  auch *die offenen Mengen* des metrischen Raumes genannt.  $\tau_d$  heißt die *von der Metrik  $d$  induzierte Topologie*. In diesem Sinne können wir jeden metrischen Raum als topologischen Raum betrachten.

**Definition:** Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt *metrisierbar*, wenn es auf  $X$  eine Metrik  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass  $\tau_d = \tau$  gilt.

Nicht jeder topologische Raum ist metrisierbar. Man nehme z.B. eine Menge aus mindestens zwei Elementen mit der Topologie  $\tau := \{X, \emptyset\}$ . Warum ist dieser topologische Raum nicht metrisierbar?

Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Wir nennen eine Menge  $U \subset X$  *Umgebung von  $x \in X$* , wenn  $U$  offen ist und  $x$  enthält. Man kann dann für topologische Räume die gleiche Begriffe wie für metrische Räume definieren, in dem man in den Definitionen anstelle von “ $\varepsilon$ -Kugel um  $x$ “ das Wort “Umgebung von  $x$ “ einsetzt. Zum Beispiel konvergiert eine Folge  $(x_n)$  im topologischen Raum  $(X, \tau)$  genau dann gegen  $x \in X$ , wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq n_0$ .

Wir wollen uns in den folgenden Aufgaben einige nicht ganz so triviale nicht-metrisierbare topologische Räume ansehen. Dazu zunächst noch einige Definitionen:

**Definition:** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum.

- Ein Mengensystem  $\beta \subset \tau$  heißt *Basis der Topologie*, wenn sich jede nichtleere offene Menge  $U \subset X$  als Vereinigung von Mengen aus  $\beta$  darstellen läßt.
- Ein Mengensystem  $\beta(x)$ , bestehend aus Umgebungen von  $x \in X$ , heißt *Umgebungs-basis von  $x$* , wenn jede Umgebung von  $x$  eine Menge aus  $\beta(x)$  enthält.
- Der topologische Raum  $(X, \tau)$  heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge in  $X$  gibt.

Überlegen Sie sich zunächst die folgenden speziellen Eigenschaften metrischer Räume, die Sie dann zum Nachweis der Nichtmetrisierbarkeit der angegebenen topologischen Räume benutzen können:

1. Zwei verschiedene Punkte eines metrischen Raumes besitzen disjunkte Umgebungen.
2. Jeder Punkt eines metrischen Raumes besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.
3. Ein metrischer Raum hat genau dann eine abzählbare Basis, wenn er separabel ist.
4. Sei  $X$  eine überabzählbare Menge und  $\tau_{abz}$  die folgende Topologie:

$$\tau_{abz} := \{X, \emptyset\} \cup \{X \setminus A \mid A \text{ endliche oder abzählbare Teilmenge von } X\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Zeigen Sie, dass  $(X, \tau_{abz})$  tatsächlich ein topologischer Raum ist und dass dieser Raum nicht metrisierbar ist.

5. Wir betrachten  $\mathbb{R}$  mit der folgenden Topologie:

$$\tau := \{\emptyset\} \cup \left\{ U \subset \mathbb{R} \mid U = \bigcup_l [a_l, b_l) \right\}.$$

D.h. im Gegensatz zur Standardtopologie auf  $\mathbb{R}$ , wo die offenen Mengen als Vereinigung offener Intervalle darstellbar sind, sind hier die offenen Mengen als Vereinigung (beliebig vieler) *halboffener* Intervalle darstellbar.

Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{R}, \tau)$  tatsächlich ein topologischer Raum ist und dass er nicht metrisierbar ist.

Als nächstes beschreiben wir die Konstruktion einer Topologie auf einer Menge von Äquivalenzklassen:

**Definition:** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Mit  $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$  bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von  $x \in X$ . Wir betrachten den Raum  $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$  aller Äquivalenzklassen von  $\sim$  und die Projektionsabbildung

$$\pi : x \in X \longmapsto [x] \in X/\sim.$$

Wir definieren nun die folgende Topologie auf  $X/\sim$ :

$$\tau_{\sim} := \{U \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \in \tau\}.$$

Die Topologie  $\tau_{\sim}$  heißt *Faktortopologie* auf  $X/\sim$ .

6. Zeigen Sie, dass  $(X/\sim, \tau_{\sim})$  tatsächlich ein topologischer Raum ist.

7. Wir betrachten auf  $X := (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$  die Äquivalenzrelation:

$$(x, \alpha) \sim (y, \beta) \iff \begin{cases} (x, \alpha) = (y, \beta) & \text{falls } x = y \geq 0 \\ x = y \text{ und } \alpha, \beta \in \{0, 1\} & \text{falls } x = y < 0. \end{cases}$$

Hier werden also zwei Geraden auf einer Hälfte miteinander verklebt, so dass eine “verzweigte“ Menge entsteht. Wir betrachten auf  $X$  die vom Euklidischen Abstand des  $\mathbb{R}^2$  induzierte Topologie und auf dem verklebten Raum  $X/\sim$  die Faktortopologie.

Zeigen Sie, dass  $X/\sim$  nicht metrisierbar ist.

8. Wir betrachten  $\mathbb{R}$  mit der Standardmetrik  $d(x, y) := |x - y|$  und der von ihr erzeugten Topologie. Auf  $\mathbb{R}$  definieren wir die Äquivalenzrelation:

$$x \sim y \iff x = y \text{ oder } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Den Raum  $\mathbb{R}/\sim$  können Sie sich als eine abzählbare Menge von Schleifen vorstellen, die in jeweils einem ihrer Punkte miteinander verklebt sind.

Zeigen Sie, dass der Schleifenraum  $\mathbb{R}/\sim$  mit seiner Faktortopologie nicht metrisierbar ist.

### Literaturempfehlung:

K. Jänich: Topologie, Springer-Lehrbuch, 8. Aufl. 2005