Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

# Zusatzaufgaben Blatt 3

## Analysis I* – WS 11/12

### Besprechungstermin in der Woche vom 2.1.-6.1.2012

---

**Hinweis**: Diese Aufgaben sind ein zusätzliches Angebot für Höhrer der Analysis I*-Vorlesung, die sich über den Vorlesungsstoff hinaus noch etwas mit analytischen Themen befassen möchten. Die Lösungen werden nicht abgegeben und korrigiert. Für Interessenten vereinbaren wir aber einen Besprechungstermin, bei dem die Lösungen besprochen werden. Dabei können Sie z.B. vorstellen, was Sie herausbekommen haben bzw. zusätzlich beim Lesen in der Literatur entdeckt haben.
Interessenten für einen Besprechungstermin melden sich bitte zur Terminabsprache bei mir. Wir haben bei der letzten Besprechung vereinbart, dass sich die interessierten Studenten vorher absprechen, wer welche Aufgabe vorführen will, damit auch die Art der Präsentation gut vorbereitet werden kann. Bitte melden Sie sich dazu bei *Maik Pickl*, email: maik.pickl@yahoo.de, der einen email-Verteiler für alle Interessenten der Zusatzaufgaben eingerichtet hat.

**1-Punkt-Kompaktifizierung topologischer Räume**

Kompakte topologische Räume spielen in der Analysis eine besondere Rolle. Auf solchen Räumen besitzt z.B. jede stetige Funktion ein Maximum und ein Minimum. Das Spektrum von Differentialoperatoren, die auf Funktionenräumen mit kompaktem Definitionsbereich operieren, ist in der Regel vergleichsweise einfach im Gegensatz zum Fall nichtkompakter Definitionsbereiche. Deshalb versucht man oft, von nicht-kompakten Räumen zu kompakten Räumen überzugehen. Das geht auf verschiedene Weise. Oft kann man Äquivalenzrelationen einführen, so dass der Raum der Äquivalenzklassen kompakt wird.
In der Topologie gibt es ein einfaches Verfahren, jeden nicht-kompakten topologischen Raum zu "Kompaktifizieren": Man fügt einen Punkt zum Raum hinzu und definiert eine geeignete Topologie. Dieses Zusatzblatt soll diese *1-Punkt-Kompaktifizierung* vorstellen und einige ihrer Eigenschaften besprechen.

Wie im Fall metrischer Räume kann man auf jeder Teilmenge eines topologischen Raumes eine Topologie induzieren: Ist $(X, \tau)$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge, so ist

$$\tau_A := \{A \cap U \mid U \in \tau\} \subset \mathcal{P}(A)$$

eine Topologie auf $A$.

Kompakte Teilmengen werden in topologischen Räumen genauso definiert wie im Fall metrischer Räume.

**Definition**: Sei $(X, \tau)$ ein toplogischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *kompakt*, wenn man aus jeder offenen Überdeckung von $A$ eine endliche Teilüberdeckung auswählen kann. Der topologische Raum $(X, \tau)$ heißt kompakt, wenn die Teilmenge $X$ kompakt ist. Ein topologische Raum $(X, \tau)$ heißt *lokal-kompakt*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung mit kompaktem Abschluß besitzt.

**Aufgabe 1:** Zeigen Sie:

1. Jeder kompakte topologische Raum ist lokal-kompakt.
2. Der $\mathbb{R}^n$ mit seiner Standardtopologie ist lokal-kompakt, aber nicht kompakt.
3. Der topologische Raum $(\mathbb{R}^n, \tau_{abz})$ (siehe 2. Zusatzblatt) ist nicht lokal-kompakt.

**Definition**: Ein topologischer Raum $(X, \tau)$ heißt $T_2$-*Raum* (oder auch *Hausdorff-Raum*), wenn man zwei verschiedene Punkte in $X$ durch offene Mengen trennen kann, d.h. wenn für je zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ Umgebungen $U(x)$ und $V(y)$ existieren mit $U(x) \cap V(y) = \emptyset$.

Wie im Fall von metrischen Räumen zeigt man für kompakte Teilmengen topologischer Räume die folgenden beiden Eigenschaften:

**Aufgabe 2:** Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum. Dann gilt:

1. Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.
2. Sei $(X, \tau)$ ein $T_2$-Raum. Dann ist jede kompakte Teilmenge von $X$ abgeschlossen.

**Definition:** Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum und $\infty$ ein zusätzlicher Punkt. Wir betrachten die Menge $X_\infty := X \cup \{\infty\}$ mit dem folgenden Mengensystem $\tau_\infty \subset \mathcal{P}(X_\infty)$:

$$\tau_\infty := \tau \cup \{\, \{\infty\} \cup (X \setminus A) \mid A \subset X \text{ kompakt und abgeschlossen}\}.$$

**Aufgabe 3:** Zeigen Sie, dass $(X_\infty, \tau_\infty)$ ein topologischer Raum ist und $(\tau_\infty)_X = \tau$ gilt.

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie, dass der topologische Raum $(X_\infty, \tau_\infty)$ kompakt ist.

**Aufgabe 5:** Sei $(X, \tau)$ ein nicht-kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass $X \subset X_\infty$ eine dichte Teilmenge ist.

Man nennt den topologischen Raum $(X_\infty, \tau_\infty)$ die *1-Punkt-Kompaktifizierung von* $(X, \tau)$ und $\infty$ den *unendlich fernen Punkt*.

**Aufgabe 6:** Zeigen Sie, dass $(X_\infty, \tau_\infty)$ genau dann ein $T_2$-Raum ist, wenn $(X, \tau)$ ein lokal-kompakter $T_2$-Raum ist.

**Aufgabe 7:** Zeigen Sie: Ist $(X, \tau)$ ein lokal-kompakter topologischer Raum mit abzählbarer Basis (siehe 2. Zusatzblatt), so hat $(X_\infty, \tau_\infty)$ ebenfalls eine abzählbare Basis.

**Aufgabe 8:** Wir betrachten den normierten Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ mit der von der Norm induzierten Topologie und seine 1-Punkt-Kompaktifizierung $\mathbb{R}^n_\infty$. Sei $(x_k)$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$x_k \longrightarrow \infty \quad \text{in } \mathbb{R}^n_\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|x_k\| \longrightarrow +\infty \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 9:** Sei $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ die Sphäre im $\mathbb{R}^n$ und bezeichne $\mathbb{C}P^1$ die Menge aller komplexen Geraden in $\mathbb{C}^2$ durch $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ sowie $\mathbb{R}P^1$ die Menge aller reellen Geraden in $\mathbb{R}^2$ durch $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie eine möglichst natürliche Identifizierung der folgenden Räume miteinander an und veranschaulichen Sie dies an einer Skizze:

a) $\mathbb{C}_\infty,\ S^2,\ \mathbb{C}P^1$.
b) $\mathbb{R}_\infty,\ S^1,\ \mathbb{R}P^1$.
c) $\mathbb{R}^n_\infty,\ S^n$.

**Aufgabe 10:** Wir betrachten nochmal die Möbiustransformationen (siehe Zusatzblatt 1). Wir können diese Abbildungen nun auf die Kompaktifizierung $\mathbb{C}_\infty$ fortsetzen.
Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Matrix aus komplexen Zahlen mit $ad - cb \neq 0$. Wir definieren die Möbiustransformation $\phi_A : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ durch

$$\phi_A(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{falls } z \in \mathbb{C} \text{ und } cz+d \neq 0 \\ \infty & \text{falls } z \in \mathbb{C} \text{ und } cz+d = 0 \\ \frac{a}{c} & \text{falls } z = \infty \text{ und } c \neq 0 \\ \infty & \text{falls } z = \infty \text{ und } c = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Ist $(z_n)$ eine Folge in $\mathbb{C}_\infty$, die gegen $z \in \mathbb{C}_\infty$ konvergiert, so konvergiert $\phi_A(z_n)$ gegen $\phi_A(z)$.

b) Seien $z_1$, $z_2$ und $z_3$ drei paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{C}_\infty$. Dann existiert eine Möbiustransformation $\phi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, so dass $\phi(z_1) = 1$, $\phi(z_2) = 0$ und $\phi(z_3) = \infty$.

**Literaturempfehlung:**


1. K. Jänich: Topologie. Springer-Verlag.
2. T. Needham: Anschauliche Funktionentheorie. Oldenbourg-Verlag 2001.