Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

# Übungsblatt 2

## Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

**WS 2013/2014**

**Abgabe am 30.10.2013**

---

**Aufgabe 4 (Hausdorff-Eigenschaft)**

Sei $X$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $X$ ist ein $T_2$-Raum.

b) Die Diagonale $\Delta := \{(x,x) \subset X \times X \mid x \in X\}$ ist abgeschlossen im Produktraum $X \times X$.

c) Für jedes $x \in X$ gilt: $\quad \{x\} = \bigcap\limits_{U(x)\ Umg.\ von\ x} cl(U(x)).$

**6 P**

**Aufgabe 5 (Satz vom abgeschlossenen Graphen für topologische Räume)**

Seien $X$ und $Y$ topologische Räume. Zeigen Sie:

a) (*Tubenlemma:*) Sei $Y$ kompakt, $x_0 \in X$ und $U \subset X \times Y$ eine offene Menge, die $\{x_0\} \times Y$ enthält. Dann existiert eine Umgebung $V(x_0) \subset X$, so dass $V(x_0) \times Y \subset U$.

b) Sei $Y$ kompakt. Dann ist die Projektion

$$\begin{array}{rcl} p_X : X \times Y & \longrightarrow & X \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$

eine abgeschlossene Abbildung.

c) Sei $Y$ ein kompakter $T_2$-Raum, $f : X \to Y$ eine Abbildung und

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

ihr Graph. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann stetig ist, wenn $\Gamma_f \subset X \times Y$ abgeschlossen ist.

**6 P**

**Aufgabe 6 (Homöomorphe topologische Räume)**

Zeigen Sie dass die folgenden topologischen Räume zueinander homöomorph sind:

a) Die Sphäre $S^n$ und die 1-Punkt-Kompaktifizierung $\mathbb{R}^n_\infty$ von $\mathbb{R}^n$.

b) Die Sphäre $S^2$ und der komplex-projektive Raum $\mathbb{C}P^1$.

c) Die Sphäre $S^1$ und der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^1$.

**6 P**

Insgesamt: **18 P**