Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 3

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

WS 2013/2014

Abgabe am 4.11.2013

Aufgabe 7 (Topologische Mannigfaltigkeiten)
Begründen Sie (mit Sätzen aus der Vorlesung), dass eine topologische Mannigfaltigkeit die folgenden Eigenschaften hat, die im Allgemeinen für topologische Räume nicht gelten:

a) Eine Teilmenge einer topologischen Mannigfaltigkeit ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist.

b) Eine topologische Mannigfaltigkeit ist genau dann zusammenhängend, wenn sie bogenzusammenhängend ist.

c) Jede kompakte Teilmenge einer topologischen Mannigfaltigkeit ist abgeschlossen.

d) Jede Zusammenhangskomponente einer topologischen Mannigfaltigkeit ist sowohl abgeschlossen als auch offen.

e) Jede topologische Mannigfaltigkeit ist parakompakt.

f) Eine Abbildung zwischen zwei topologischen Mannigfaltigkeiten ist genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.

6 P

Aufgabe 8 (Glatte Mannigfaltigkeiten)

a) Zeigen Sie, dass der komplex-projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ eine $2n$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit ist.

b) Wir betrachten auf $S^{n-1} \times [-1,1]$ die Äquivalenzrelation

$$(x,t) \sim (y,s) \;:\Longleftrightarrow\; (x,t) = (y,s) \;\text{ oder }\; t = s = 1 \;\text{ oder }\; t = s = -1.$$

Zeigen Sie, dass der Faktorraum $M := (S^{n-1} \times [-1,1])/_\sim$ die Struktur einer n-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit trägt.
(*Hinweis: Mit welcher bekannten Mannigfaltigkeit können Sie M identifizieren?*).

6 P

Aufgabe 9 (Glatte Abbildungen)
Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen *glatte* Abbildungen zwischen den angegebenen Mannigfaltigkeiten sind:

a) Die Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$.

b) Die Abbildung $f : \mathbb{RP}^n \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^{n+1}) \simeq \mathbb{R}^{(n+1)^2}$:

$$f([x])(v) := \frac{\langle v, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x \qquad \text{für } [x] \in \mathbb{RP}^n \text{ und } v \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

6 P

Insgesamt: **18 P**