Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 4

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

WS 2013/2014

Abgabe am 11.11.2013

Aufgabe 10 *(Eine weitere Realisierung des Tangentialraumes: Tangentialvektoren als Derivationen auf den Funktionenkeimen)*

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Zwei in einer Umgebung von p definierte glatte Funktionen $f_1 : U_1(p) \subset M \to \mathbb{R}$ und $f_2 : U_2(p) \subset M \to \mathbb{R}$ nennen wir äquivalent, wenn es eine Umgebung $V(p) \subset U_1(p) \cap U_2(p)$ gibt, auf der f_1 und f_2 übereinstimmen. Die entstehende Äquivalenzklasse von f_1 bezeichnen wir mit $[f_1]_p$. Sie heißt *Keim der glatten Funktion* f_1 *in* $p \in M$. Mit $\mathcal{E}_p(M)$ bezeichnen wir die Menge der glatten Funkionenkeime in $p \in M$. $\mathcal{E}_p(M)$ ist eine reelle Algebra mit den Operationen

$$\begin{aligned} \lambda[f]_p + \mu[g]_p &:= [(\lambda f + \mu g)_{|D}]_p, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ [f]_p \cdot [g]_p &:= [(f \cdot g)_{|D}], \end{aligned}$$

wobei D den Durchschnitt der Definitionsbereiche von f und g bezeichnet. Eine Abbildung $v : \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$ heißt *Derivation auf* $\mathcal{E}_p(M)$, wenn v linear ist und die Produktregel

$$v([f]_p \cdot [g]_p) = f(p) \cdot v([g]_p) + v([f]_p) \cdot g(p), \quad [f]_p, [g]_p \in \mathcal{E}_p(M),$$

erfüllt. Wir definieren

$$T_p^{alg} M := \{ v : \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R} \mid \ v \text{ ist eine Derivation auf } \mathcal{E}_p(M) \ \}.$$

a) Sei $[\gamma] \in T_pM$ ein Tangentialvektor in $p \in M$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $v_{[\gamma]} : \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$,

$$v_{[\gamma]}([f]_p) := (f \circ \gamma)'(0),$$

korrekt definiert (d.h. unabhängig von der Wahl von $\gamma \in [\gamma]$ und $f \in [f]_p$) und eine Derivation auf $\mathcal{E}_p(M)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \phi : & T_pM & \longrightarrow & T_p^{alg}M \\ & [\gamma] & \longmapsto & v_{[\gamma]} \end{array}$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Hinweis: Beim Beweis der Surjektivität von ϕ ist das folgende Lemma nützlich:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Kugel um den Nullpunkt* $0 \in \mathbb{R}^n$ *und* $h : \Omega \to \mathbb{R}$ *eine glatte Funktion mit* $h(0) = 0$. *Dann existieren glatte Funktionen* $h_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, *so dass*

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot h_j(x_1, \ldots, x_n) \qquad \forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega.$$

c) Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine zulässige Karte um $p \in M$ und $(\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p))$ die kanonische Basis von T_pM zu dieser Karte. Zeigen Sie, dass die Derivation $\phi(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)) \in T_p^{alg}M$ gegeben ist durch

$$\phi\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\Big)([f]_p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)).$$

6 P

—- bitte wenden —

Aufgabe 11
Wir betrachten die Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ auf den n-dimensionalen reell-projektiven Raum. Sei $\widetilde{U}_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$ und $\varphi_i : U_i := \pi(\widetilde{U}_i) \to \mathbb{R}^n$ die in der Vorlesung betrachtete Karte von $\mathbb{RP}^n$:

$$\varphi_i([x]) = \Big(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\Big).$$

a) Bestimmen Sie das Differential der Abbildung $\varphi_i \circ \pi : \widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ im Punkt $x \in \widetilde{U}_i$.

b) Zeigen Sie für den Kern von $d\pi_x$: $\operatorname{Ker} d\pi_x = \mathbb{R}x$.

c) Zeigen Sie, dass π eine Submersion ist.

6 P

Aufgabe 12
Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{RP}^n \longrightarrow \operatorname{End}(\mathbb{R}^{n+1}) \simeq \mathbb{R}^{(n+1)^2}$, definiert durch

$$f([x])(v) := \frac{\langle v, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x \qquad \text{für } [x] \in \mathbb{RP}^n \text{ und } v \in \mathbb{R}^{n+1},$$

eine Einbettung ist.

6 P

Insgesamt: **18 P**