Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 5

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

WS 2013/2014

Abgabe am 18.11.2013

Aufgabe 13

a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$T^2_{a,b} := \{((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u) \in \mathbb{R}^3 \mid u, v \in \mathbb{R}\}, \quad a > b > 0,$$

eine zum Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ diffeomorphe Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Skizzieren Sie $T^2_{a,b}$.

b) Zeigen Sie, dass die Gruppe

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

eine $(n^2 - 1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $GL(n, \mathbb{R})$ ist. **6 P**

Aufgabe 14

a) Es seien $X_1, X_2, X_3 : S^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ die folgenden Abildungen:

$$\begin{aligned} X_1(x, y, z, w) &:= (-y, x, -w, z), \\ X_2(x, y, z, w) &:= (z, -w, -x, y), \\ X_3(x, y, z, w) &:= (-w, -z, y.x). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass X_1, X_2, X_3 glatte Vektorfelder auf S^3 sind und dass für ihre Kommutatoren gilt:

$$[X_1, X_2] = 2X_3, \quad [X_2, X_3] = 2X_1, \quad [X_3, X_1] = 2X_2.$$

b) Wir betrachten die Karte $(S^3 \setminus \{N\}, \varphi_N)$, die durch die stereographische Projektion φ_N aus dem Nordpol N gegeben ist (siehe Vorlesung). Berechnen Sie die Koeffizienten des Vektorfeldes X_1 für die kanonischen Basisfelder dieser Karte. **6 P**

Aufgabe 15

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Kommutators von Vektorfeldern auf glatten Mannigfaltigkeiten:

a) Die *Jacobi-Identität*: Für alle Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

b) Die *Produktregel*: Für $f, g \in C^\infty(M)$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$[fX, gY] = fg\,[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

c) Die *Richtungsableitung*: Für $h \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$[X, Y](h) = X(Y(h)) - Y(X(h)).$$

d) *Kommutator F-verknüpfter Vektorfelder*: Seien $F : M \to N$ eine glatte Abbildung, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ Vektorfelder auf M bzw. N.
Zeigen Sie: Sind X_i und Y_i F-verknüpft $(i = 1, 2)$, so sind auch die Kommutatoren $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ F-verknüpft. **8 P**

Insgesamt: **20 P**