Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 6

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

WS 2013/2014

Abgabe am 25.11.2013

Aufgabe 16

Seien $X_1, \dots, X_k$ Vektorfelder auf einer n-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M, $k \leq n$, $p \in M$ und gelte

a) $X_1(p), \dots, X_k(p)$ sind linear unabhängig in T_pM, und

b) $[X_i, X_j] = 0$ für alle $i, j = 1, \dots, k$.

Beweisen Sie, dass eine zulässige Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ um p existiert, so dass $X_i|_U = \frac{\partial}{\partial x_i}$ für $i = 1, \dots, k$.

Hinweis:
Arbeiten Sie folgende Idee zu einem Beweis aus: Wähle eine Karte $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ um p, so dass $\psi(p) = 0$ und $T_pM = \operatorname{span}\left\{X_1(p), \dots, X_k(p), \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}(p)\right\}$ (warum existiert eine solche Karte?) und betrachte für eine hinreichend kleine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$h(x_1, \dots, x_n) := \phi^1_{x_1} \circ \dots \circ \phi^k_{x_k}\left(\psi^{-1}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)\right),$$

wobei ϕ^i den Fluss des Vektorfeldes X_i bezeichnet. h ist dann ein lokaler Diffeomorphismus um $0 \in \mathbb{R}^n$ (warum?) und sein Inverses definiert eine Karte mit den gesuchten Eigenschaften.

6 P

Aufgabe 17

Zeigen Sie, dass die Matrizengruppen $SL(n, \mathbb{C})$, $SO(n)$ und $SU(n)$ Lie-Gruppen sind und bestimmen Sie ihre Lie-Algebren und deren Dimension.

6 P

Aufgabe 18

Sei G eine Lie-Gruppe.

a) Sei $X \in \mathfrak{X}(G)$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf G, $\gamma_e : I \subset \mathbb{R} \to G$ eine Integralkurve von X durch das neutrale Element $e \in G$ und $g \in G$. Zeigen Sie, dass $\gamma_g : I \to G$,

$$\gamma_g(t) := g \cdot \gamma_e(t), \quad t \in I,$$

eine Integralkurve von X durch g ist.

b) Zeigen Sie, dass jedes linksinvariante Vektorfeld auf G vollständig ist.

c) Sei $G = O(3)$ die orthogonale Gruppe und $X : O(3) \to M(3, \mathbb{R})$ die Abbildung

$$X\left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{32} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} g_{12} & -g_{11} & 0 \\ g_{22} & -g_{21} & 0 \\ g_{32} & -g_{31} & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass X ein linksinvariantes Vektorfeld auf $O(3)$ ist und berechnen Sie die maximale Integralkurve von X durch das Element $a \in O(3)$ mit

$$a := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

6 P

Insgesamt: **18 P**