Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 7

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

WS 2013/2014

Abgabe am 02.12.2013

Aufgabe 19

Sei $f : M \longrightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} df: & TM & \longrightarrow & TN \\ & v \in T_pM & \longmapsto & df_p(v) \end{array}$$

ebenfalls eine glatte Abbildung ist. **4 P**

Aufgabe 20

Sei M eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und T^*M ihr Cotangentialbündel mit der Projektion $\pi : T^*M \to M$. Wir betrachten auf der Mannigfaltigkeit T^*M die folgende 1-Form $\theta \in \Omega^1(T^*M) \simeq \Gamma(\Lambda^1(T^*M))$:

$$\theta : \ \omega \in T^*M \ \longmapsto \ \theta_\omega \in T^*_\omega(T^*M),$$

definiert durch

$$\theta_\omega(v) := \omega(d\pi_\omega(v)) \quad \text{für } v \in T_\omega(T^*M).$$

Sei (U, φ) eine zulässige Karte von M und $\phi_{(U,\varphi)} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ die von ihr definierte Karte auf T^*M, d.h.,

$$\phi_{(U,\varphi)}(\omega) := (x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n), \qquad \omega \in \pi^{-1}(U),$$

wobei $(x_1, \dots, x_n) := \varphi(p)$ die Koordinaten des Fußpunktes $p := \pi(\omega)$ von ω und $(a_1, \dots, a_n)$ die Koeffizienten in der Basisdarstellung $\omega = \sum_{i=1}^n a_i (dx_i)_p$ von ω bzgl. der Karte φ sind.

a) Zeigen Sie, dass die 1-Form θ bzgl. der Karte $(\pi^{-1}(U), \phi_{(U,\varphi)})$ die lokale Darstellung

$$\theta_\omega = \sum_{i=1}^n a_i (dx_i)_\omega$$

besitzt.

b) Schlußfolgern Sie daraus, dass θ tatsächlich eine *glatte* 1-Form auf T^*M ist.

θ heißt auch *kanonische 1-Form* oder *Liouville-Form* auf T^*M. **4 P**

— Bitte wenden —

Aufgabe 21

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. Für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir das Vektorfeld $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ durch

$$(\nabla_X Y)(p) := \operatorname{proj}_{T_pM} X(Y)(p)\ , \qquad p \in M.$$

a) Begründen Sie, dass $\nabla_X Y$ tatsächlich ein Vektorfeld auf M ist.

b) Untersuchen Sie, welche der folgenden fünf Abbildungen Tensorfelder sind:

$$\begin{aligned} \nabla Y : \quad \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M), \\ X &\longmapsto \nabla_X Y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X : \quad \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M), \\ Y &\longmapsto \nabla_X Y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A : \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M), \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \nabla_X \nabla_Y Z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B : \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M), \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R : \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M), \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \end{aligned}$$

6 P

Insgesamt: **14 P**