Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 8

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

WS 2013/2014

Abgabe am 09.12.2013

Aufgabe 22

Sei X ein Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M und bezeichne $\{\phi_t\}$ seinen (lokalen) Fluß. Unter der *Lie-Ableitung* eines $(k,0)$-Tensorfeldes B auf M in Richtung X versteht man das durch folgende Definition gegebene $(k,0)$-Tensorfeld $L_X B$:

$$(L_X B)_p := \frac{d}{dt}(\phi_t^* B)_p\Big|_{t=0}, \qquad p \in M. \qquad (*)$$

Begründen Sie, dass $(*)$ tatsächlich ein $(k,0)$-Tensorfeld auf M definiert und beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Lie-Ableitung von Tensorfeldern:

a) $L_X(fB) = X(f)B + fL_X B$.

b) $L_X(B_1 \otimes B_2) = L_X B_1 \otimes B_2 + B_1 \otimes L_X B_2$.

c) $(L_X B)(X_1, \ldots, X_k) = X(B(X_1, \ldots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k} B(X_1, \ldots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \ldots, X_k)$.

d) $L_{[X,Y]}B = (L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)B$.

Hierbei bezeichnet B ein $(k,0)$-Tensorfeld, B_1 und B_2 $(k_1,0)$ bzw. $(k_2,0)$-Tensorfelder, $X, Y, X_1, \ldots, X_k$ glatte Vektorfelder und f eine glatte reell-wertige Funktion auf M.

8 P

Aufgabe 23

Zeigen Sie:

a) Jede Lie-Gruppe ist orientierbar.

b) Das Tangentialbündel TM *jeder* glatten Mannigfaltigkeit M ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit.

c) Der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist genau dann orientierbar, wenn n ungerade ist.

6 P

Aufgabe 24

Die folgende Riemannsche Mannigfaltigkeit (D, g_D) heißt *Poincarésche Kreisscheibe*:

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \qquad g_D := \frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2}(dx^2 + dy^2).$$

Berechnen Sie für $0 < r < 1$ den Flächeninhalt der Teilmenge

$$D_r := \{(x,y) \in D \mid x^2 + y^2 < r^2\}$$

sowie die Länge der Kurve $\gamma_r : [0, 2\pi] \to D$,

$$\gamma_r(t) := (r\cos t, r\sin t)$$

in der Poincaréschen Kreisscheibe (D, g_D).

6 P

Insgesamt: **20 P**