Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 9

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

WS 2013/2014

Abgabe am 16.12.2013

Aufgabe 25

Für eine komplexe Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})$ bezeichne $F_A : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ die Möbiustransformation

$$F_A(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{falls } z \in \mathbb{C}, \\ \frac{a}{c} & \text{falls } z = \infty. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die durch eine Matrix $A \in SL(2,\mathbb{R})$ definierte Möbiustransformation eine Isometrie der Poincaré-Halbebene (H^+, g_{H^+}) auf sich selbst induziert.

4 P

Aufgabe 26 (*Kartenabbildungen - Zylinderprojektionen*)

Wir konstruieren uns auf die folgende Weise eine Landkarte von der Erde (hier als S^2 idealisiert):
Sei $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Zylinder, der die Sphäre S^2 im Äquator berührt. Wir betrachten eine Abbildung, die jeden Sphärenpunkt nach außen auf Z projeziert, und zwar so, dass jeder Breitenkreis der Sphäre auf einen Kreis (konstanter Höhe) auf dem Zylinder abgebildet wird und der Urbild- und Bildpunkt in der gleichen, die z-Achse enthaltenden Ebene liegen. Anschließend schneiden wir den Zylinder entlang der Mantellinie durch $(1,0,0)$ auf und wickeln ihn in die Ebene ab. Auf diese Weise entsteht eine Kartenabbildung von der Teilmenge

$$U := \{(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) \mid u \in (0,2\pi), v \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\} \subset S^2$$

in die Ebene, die sich in sphärischen Koordinaten und mittels einer glatten Funktion $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ folgendermaßen beschreiben läßt:

$$\begin{array}{rccc} F_h : & U \subset S^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) & \longmapsto & (u, h(v)). \end{array}$$

Geben Sie eine Funktion h an, so dass die Kartenabbbildung $F_h : U \subset S^2 \to F_h(U) \subset \mathbb{R}^2$

a) flächentreu ist (*flächentreuer Zylinderentwurf*),

b) winkeltreu ist (*winkeltreuer Zylinderentwurf*).

6 P

— bitte wenden —

Aufgabe 27

Wir betrachten die Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^{2+n}$ mit den Euklidischen Koordinaten $(v, u, x_1, \ldots, x_n)$. Es sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^+)$ eine glatte Funktion und $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathrm{Symm}^+(n, \mathbb{R}))$ eine glatte Abbildung in die symmetrischen, positiv-definiten $(n \times n)$-Matrizen. Desweiteren bezeichne g das durch

$$(v, u, \underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{=:x}) \in \mathbb{R}^{2+n} \quad \longmapsto \quad g_{(v,u,x)} := -2dvdu + f(u,x)du^2 + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x) dx_i dx_j$$

definierte $(2, 0)$-Tensorfeld.

($dvdu$, du^2 bzw. $dx_i dx_j$ ist eine übliche Abkürzung für das symmetrische Tensorprodukt von dv mit du, von du mit du bzw. von dx_i mit dx_j.)

a) Zeigen Sie, dass g eine Lorentz-Metrik auf $\mathbb{R}^{2+n}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial v}$ isotrop auf $(\mathbb{R}^{2+n}, g)$ ist.

c) Bestimmen Sie den Fluß von $\frac{\partial}{\partial v}$.

d) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial}{\partial v}$ ein Killingvektorfeld auf $(\mathbb{R}^{2+n}, g)$ ist.

6 P

Insgesamt: **16 P**