Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 10

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

WS 2013/2014

Abgabe am 06.01.2014

Aufgabe 28
Sei ∇ eine metrische kovariante Ableitung auf einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g), d.h. es gelte

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

für alle Vektorfelder X, Y, Z auf M. Sei $\gamma : I \to M$ eine glatte Kurve auf M und V und W Vektorfelder entlang γ. Beweisen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\, g_{\gamma(t)}(V(t), W(t)) = g_{\gamma(t)}\Big(\frac{\nabla V}{dt}(t), W(t)\Big) + g_{\gamma(t)}\Big(V(t), \frac{\nabla W}{dt}(t)\Big)$$

für alle $t \in I$. **4 P**

Aufgabe 29
Sei ∇ eine kovariante Ableitung auf M, X und Y Vektorfelder auf M und γ die Integralkurve von X durch $p \in M$. Beweisen Sie, dass sich die kovariante Ableitung ∇ auf folgende Weise durch die Parallelverschiebung $\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma}$ entlang γ ausdrückt:

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt}\, {\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_{|[0,t]}}}^{-1}\Big(Y(\gamma(t))\Big)\,|_{t=0}.$$

4 P

Aufgabe 30
Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Sphäre vom Radius 1 mit induzierter Riemannscher Metrik g, $N = (0, \dots, 0, 1)$ der Nordpol von S^n und ∇^g der Levi-Civita-Zusammenhang

$$(\nabla^g_X Y)(p) := \mathrm{proj}_{T_pS^n}\, X(Y)(p)\,, \qquad p \in S^n,\ X, Y \in \mathfrak{X}(S^n)$$

von (S^n, g). Wir betrachten die Gruppe $Hol_N(S^n, \nabla^g)$ der Parallelverschiebungen entlang aller in N geschlossenen stückweis glatten Kurven auf S^n :

$$Hol_N(S^n, \nabla^g) := \Big\{ \mathcal{P}^{\nabla^g}_{\gamma} \;\Big|\; \gamma \text{ stückweis glatte, in } N \text{ geschlossene Kurve in } S^n \Big\}.$$

(*Diese Gruppe heißt Holonomiegruppe von* (S^n, g)).
Zeigen Sie, dass

$$Hol_N(S^n, \nabla^g) = SO(T_N S^n, g_N).$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass die Gruppe $SO(n)$ durch Drehungen in 2-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird und betrachten Sie spezielle Kurven γ, die vom Nordpol entlang eines Großkreises bis zum Äquator laufen, anschließend ein Stück auf dem Äquator entlang und dann auf einem Großkreis zurück zum Nordpol.

4 P

Die folgenden Aufgaben sind **freiwillige Zusatzaufgaben**. Sie richten sich an diejenigen Studenten, die bisher weniger als 50% der Punkte bei den Übungsaufgaben erreicht haben, aber noch einen Übungsschein erwerben wollen. Die Punkte werden zusätzlich gutgeschrieben.

Aufgabe Z1

Sei $F : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ eine Isometrie zwischen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ bezeichne $dF(X) \in \mathfrak{X}(N)$ das induzierte Vektorfeld auf N:

$$dF(X)(F(p)) = dF_p(X(p)), \qquad p \in M.$$

Zeigen Sie, dass für die Levi-Civita-Zusammenhänge ∇^g von (M, g) und ∇^h von (N, h) gilt:

$$dF\Big(\nabla^g_X Y\Big) = \nabla^h_{dF(X)} dF(Y) \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

4 P

Aufgabe Z2

Wir betrachten die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der induzierten Riemannschen Metrik g. Seien $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $X_{v,w} : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ die durch

$$X_{v,w}(p) := \langle v, p\rangle \cdot w - \langle w, p\rangle \cdot v, \qquad p \in S^n,$$

definierte Abbildung, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $X_{v,w}$ ein Killing-Vektorfeld auf (S^n, g) ist.

b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{span}\{X_{v,w} \mid v, w \in \mathbb{R}^{n+1}\} \subset \mathfrak{X}(S^n)$ ein endlich-dimenionaler Unterraum ist und bestimmen Sie seine Dimension.

c) Berechnen Sie den Kommutator $[X_{v,w}, X_{\tilde{v},\tilde{w}}]$ für $v, w, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

6 P

Aufgabe Z3
Sei G eine Lie-Gruppe, $R_a : G \to G$ die Rechtstranslation und $L_a : G \to G$ die Linkstranslation zu $a \in G$. Eine Metrik g auf G heißt *bi-invariant*, wenn die Rechtstranlationen R_a und die Linkstranslationen L_a für alle $a \in G$ Isometrien von (G, g) sind.

Wir betrachten eine Lie-Gruppe G mit bi-invarianter Metrik g. Seien X, Y und Z linksinvariante Vektorfelder auf G, $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ sei der Fluss von X und $\gamma : \mathbb{R} \to G$ die Integralkurve von X durch das neutrale Element $e \in G$.
Zeigen Sie:

a) $\phi_t = R_{\gamma(t)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (siehe auch Aufgabe 18).

b) Für den Kommutator $[X, Y]$ gilt:

$$[X, Y](a) = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{(dR_{\gamma(-t)})_{\gamma(t)\cdot a}(dL_{\gamma(t)})_a(Y(a))}_{\in T_aG} \Big)\Big|_{t=0}$$

für alle $a \in G$.

c) $g_a([X, Y](a), Z(a)) + g_a(Y(a), [X, Z](a)) = 0$ für alle $a \in G$.

d) Für den Levi-Civita-Zusammenhang von (G, g) gilt

$$\nabla^g_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

8 P

Insgesamt **12 Punkte + 18 Zusatzpunkte**

Frohe Weihnachten
und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr !!!