

Übungsblatt 11

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

WS 2013/2014
Abgabe am 13.01.2014

Aufgabe 31

Sei $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve mit den Krümmungen $k_j^\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n-1$. Zeigen Sie:

- a) $k_j^\gamma > 0$ für $j = 1, \dots, n-2$.
- b) Sei $\rho : J \rightarrow I$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation und $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \rho$ die Umparametrisierung von γ . Dann gilt:

$$k_j^{\tilde{\gamma}}(s) = k_j^\gamma(\rho(s)), \quad \forall s \in J, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

- c) Sei $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine eigentliche Euklidische Bewegung und $\delta := B \circ \gamma$. Dann gilt:

$$k_j^\delta = k_j^\gamma, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

6 P

Aufgabe 32

Es sei $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve mit der Krümmung $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ und der Windung $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$, $(\gamma(t); e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ das begleitende Frenetsche Koordinatensystem und $D(t) := \tau(t)e_1(t) + \kappa(t)e_3(t)$ der begleitende *Darboux'sche Drehvektor*, $t \in I$. Zeigen Sie:

- a) Die Frenetschen Gleichungen für γ sind äquivalent zu den *Darboux'schen Gleichungen*

$$e_i'(t) = D(t) \times e_i(t), \quad t \in I, \quad i = 1, 2, 3.$$

- b) γ ist genau dann eine Schraubenlinie, wenn D konstant ist.
- c) γ ist genau dann eine Böschungslinie, wenn $\frac{D}{\|D\|}$ konstant ist.

6 P

Aufgabe 33

Eine Raumkurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *sphärisch*, wenn ihr Bild auf einer Sphäre liegt, d.h. wenn ein $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und ein $r \in \mathbb{R}^+$ existieren, so dass

$$\|\gamma(t) - x_0\| = r \quad \forall t \in I.$$

Zeigen Sie, dass eine auf Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve mit nirgends verschwindender Windung genau dann sphärisch ist, wenn für ihre Krümmung κ und ihre Windung τ die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \right)' \equiv 0.$$

6 P

Insgesamt: 18 P