Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 12

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

WS 2013/2014

Abgabe am 20.01.2013

Aufgabe 34

a) Zeigen Sie, dass jede kompakte Fläche (ohne Rand) im $\mathbb{R}^3$ einen Punkt mit positiver Gauß-Krümmung besitzt.
Hinweis: Fixieren Sie einen Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ und untersuchen Sie die Gauß-Krümmung eines Punktes der Fläche mit dem größten Abstand zu P.

b) Zeigen Sie, dass es keine kompakten Minimalflächen (ohne Rand) im $\mathbb{R}^3$ gibt.

6 P

Aufgabe 35

Wir betrachten die Beltrami-Fläche vom Radius r:

$$M^2(r) := \Big\{ \Big(r\cos(u)\sin(v), r\sin(u)\sin(v), r\big(\ln\tan(\frac{v}{2}) + \cos(v)\big)\Big) \;\Big|\; v \in (0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\},\ u \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Skizzieren Sie die Beltrami-Fläche und zeigen Sie:

a) Die Gauß-Krümmung der Sphäre $S^2(r)$ vom Radius r ist konstant $\frac{1}{r^2}$.

b) Die Gauß-Krümmung der Beltrami-Fläche $M^2(r)$ vom Radius r ist konstant $-\frac{1}{r^2}$.

6 P

Aufgabe 36

Wir betrachten die Flächen

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{(\cosh(v)\cos(u), \cosh(v)\sin(u), v) \mid u \in \mathbb{R},\ v \in (-1,1)\} && (\textit{Katenoid}) \\ M_2 &:= \{(v\cos(u), v\sin(u), u) \mid u \in \mathbb{R},\ v \in (1,2)\} && (\textit{Wendelfläche}) \end{aligned}$$

Skizzieren Sie diese beiden Flächen und zeigen Sie, dass sie Minimalflächen sind. **6 P**

Insgesamt: **18 P**