Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 13

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

WS 2013/2014

Abgabe am 27.01.2013

Aufgabe 37

Sei $n = p + q$ und bezeichne $\mathbb{R}^{p,q}$ den $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle_{p,q} := -x_1y_1 - \ldots - x_py_p + x_{p+1}y_{p+1} + \ldots + x_ny_n,$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Sei $r > 0$.
Wir betrachten die Hyperfläche

$$S^n_p(r) := \{x \in \mathbb{R}^{p,q+1} \mid \langle x, x\rangle_{p,q+1} = r^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

mit der durch das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,q+1}$ induzierten Metrik g, sowie die Hyperfläche

$$H^n_p(r) := \{x \in \mathbb{R}^{p+1,q} \mid \langle x, x\rangle_{p+1,q} = -r^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

mit der durch das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p+1,q}$ induierten Metrik h.
Zeigen Sie:

a) $(S^n_p(r), g)$ ist eine n-dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index p mit konstanter Schnittkrümmung $\frac{1}{r^2}$.

b) $(H^n_p(r), h)$ ist eine n-dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index p mit konstanter Schnittkrümmung $-\frac{1}{r^2}$. **6 P**

Aufgabe 38

Wir betrachten die Sphäre S^2 mit der induzierten Riemannschen Metrik g (konstante Schnittkrümmung 1) sowie den hyperbolischen Raum H^2 mit der Poincare-Metrik h (konstante Schnittkrümmung -1). Zeigen Sie:

a) Jeder 3-dimensionale zusammenhängende Einstein-Raum hat konstante Schnittkrümmung.

b) Die Mannigfaltigkeit $S^2 \times S^2$ mit der Produktmetrik $g \times g$ ist ein Einstein-Raum, hat aber keine konstante Schnittkrümmung.

c) Die Mannigfaltigkeit $S^2 \times H^2$ mit der Produktmetrik $g \times h$ hat konstante Skalarkrümmung, ist aber kein Einsteinraum. **6 P**

Aufgabe 39

Sei (M^n, g) eine zusammenhängende semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ und gelte für die Schnittkrümmung

$$K_E(x) = K(x) \qquad \text{für alle 2-dim. nichtausgearteten Unterräume } E \subset T_xM,$$

wobei $K \in C^\infty(M)$. Dann ist die Funktion K konstant. **4 P**

Insgesamt: **16 P**