Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 14

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

WS 2013/2014

Abgabe am 03.02.2013

Aufgabe 40

a) Zeigen Sie, dass die semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(S^n_p(r), g)$ und $(H^n_p(r), h)$ aus Aufgabe 37 geodätisch vollständig sind.

b) Skizzieren Sie die raumartigen, die zeitartigen sowie die isotropen Geodäten der 2-dimensionalen Lorentz-Mannigfaltigkeit $(H^2_1(r), h)$.

6 P

Aufgabe 41

Wir betrachten auf dem $\mathbb{R}^2$ die Metrik g, gegeben durch

$$g_{(x,y)} := (\cos^4(y) - 1)dx^2 - 2dxdy.$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, g)$ eine Lorentz-Mannigfaltigkeit ist.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, g)$ nicht geodätisch vollständig ist.
Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := \left(\frac{1}{t} - t, \arctan(t)\right)$ eine Geodäte auf $(\mathbb{R}^2, g)$ ist.

6 P

Aufgabe 42

Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eine glatte reguläre Kurve mit

$$\frac{\nabla^g \gamma'}{dt}(t) = \sigma(t) \cdot \gamma'(t) \qquad \forall\, t \in I,$$

wobei $\sigma : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist.
Zeigen Sie, dass γ eine Prägeodäte von (M, g) ist.
Hinweis: Um eine geeignete Umparametrisierung von γ zu finden, betrachten Sie die Stammfunktion G von σ, die Stammfunktion h von e^G und dann die Umkehrfunktion von h. **6 P**

Insgesamt: **18 P**