Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 1

Differentialgeometrie I - SS 09

Abgabe 22.04.2009

Aufgabe 1
Wir betrachten die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der induzierten Riemannschen Metrik g.
Sei $f : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow S^2$ die folgende Parametrisierung der Sphäre:

$$f(\varphi, \theta) := (\cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

a) Berechnen Sie die Koeffizienten der Metrik g bzgl. der Karte f^{-1} und bestimmen Sie die Schnittwinkel der Koordinatenlinien $f(\cdot, \theta)$ und $f(\varphi, \cdot)$.

b) Sei $\gamma(t) = f(\varphi(t), \theta(t))$ eine Kurve in S^2, die die Meridiane $f(\varphi, \cdot)$ in einem konstanten Winkel schneidet (sogenannte *Loxodrome*). Bestimmen Sie eine Differentialgleichung für $\varphi(t)$ und $\theta(t)$ und lösen Sie diese mittels der Integration

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\, dx = \ln \tan(x/2) + C.$$

c) Gibt es auf jeder Fläche Karten, so dass sich die Koordinatenlinien senkrecht schneiden ?

4 P

Aufgabe 2
Wir betrachten die obere Halbebene $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ versehen mit der Riemannschen Metrik g, die durch $g_{(x,y)} := \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ definiert ist. Berechnen Sie in dieser Metrik die Länge des Kreisbogens $\gamma : (\pi/2 - \varphi_0, \pi/2) \longrightarrow H^2$:

$$\gamma(t) := (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t)).$$

Hierbei ist $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ und $r \in \mathbb{R}^+$.

3 P

Aufgabe 3
Sei (M, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit und $v, w \in T_xM$ zwei zeitartige Tangentialvektoren. Zeigen Sie, dass die 'umgekehrte' Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gilt:

$$|g_x(v, w)| \geq \|v\| \cdot \|w\|,$$

wobei $\|v\| := \sqrt{|g_x(v, v)|}$.

3 P

Insgesamt: **10 P**