Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 2

Differentialgeometrie I - SS 09

Abgabe 29.04.2009

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die stereographische Projektion aus dem Nordpol

$$\varphi_N : S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine konforme Abbildung ist.
(S^n und $\mathbb{R}^n$ seien dabei mit der induzierten Riemannschen Metrik versehen).

4 P

Aufgabe 5
Es bezeichne (H^+, g_{H^+}) die Poincaré-Halbebene

$$H^+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad (g_{H^+})_{(x,y)} := \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

und (D^2, g_{D^2}) die Poincaré-Kreisscheibe

$$D^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad (g_{D^2})_{(x,y)} := \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}(dx^2 + dy^2).$$

a) Zeigen Sie, dass die durch eine Matrix $A \in SL(2,\mathbb{R})$ definierte Möbiustransformation eine Isometrie der Poincaré-Halbebene (H^+, g_{H^+}) auf sich selbst ist.

b) Zeigen Sie, dass die Möbiustransformation

$$F(z) := \frac{iz+1}{z+i}$$

eine Isometrie zwischen der Poincaré-Halbebene (H^+, g_{H^+}) und der Poincaré-Kreisscheibe (D^2, g_{D^2}) ist.

4 P

Aufgabe 6
Sei $f : (M,g) \longrightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ ein typerhaltender Diffeomorphismus zwischen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:

a) f ist eine Isometrie $\Longleftrightarrow$ f ist längentreu.

b) f ist konform $\Longleftrightarrow$ f ist orthogonalitätserhaltend.

c) f ist längentreu $\Longleftrightarrow$ f ist orthogonalitätserhaltend und volumentreu.

4 P

Insgesamt: **12 P**