



# Übungsblatt 3

## Differentialgeometrie I - SS 09

Abgabe 06.05.2009

### Aufgabe 7

Beweisen Sie folgende Formeln für die Lie-Ableitung von Tensorfeldern auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ :

- a)  $L_X(fB) = X(f)B + fL_XB$
- b)  $L_X(B_1 \otimes B_2) = L_XB_1 \otimes B_2 + B_1 \otimes L_XB_2$
- c)  $(L_XB)(X_1, \dots, X_r) = X(B(X_1, \dots, X_r)) - \sum_{i=1}^r B(X_1, \dots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \dots, X_r)$
- d)  $[L_X, L_Y] := L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X, Y]}$ .

Dabei bezeichnen  $B, B_1, B_2$  Tensorfelder,  $f$  eine glatte Funktion und  $X, Y, X_1, \dots, X_r$  Vektorfelder auf  $M$ .

4 P

### Aufgabe 8

Sei  $\nabla$  eine metrische kovariante Ableitung auf einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ , d.h. es gelte

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

für alle Vektorfelder  $X, Y, Z$  auf  $M$ . Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  eine glatte Kurve auf  $M$  und  $V$  und  $W$  Vektorfelder entlang  $\gamma$ . Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt} \left( g_{\gamma(t)}(V(t), W(t)) \right) = g_{\gamma(t)} \left( \frac{\nabla V}{dt}(t), W(t) \right) + g_{\gamma(t)} \left( V(t), \frac{\nabla W}{dt}(t) \right) \quad \text{für alle } t \in I.$$

4 P

### Aufgabe 9

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit kovarianter Ableitung  $\nabla$ , seien  $X, Y$  Vektorfelder auf  $M$  und  $\gamma$  die Integralkurve von  $X$  durch den Punkt  $p \in M$ . Zeigen Sie, dass sich die kovariante Ableitung auf die folgende Weise durch die Parallelverschiebung  $\mathcal{P}^\nabla$  entlang  $\gamma$  ausdrücken läßt:

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt} \left( \left( \mathcal{P}_{\gamma|_{[0,t]}}^\nabla \right)^{-1} (Y(\gamma(t))) \right) \Big|_{t=0}.$$

4 P

Insgesamt: 12 P