Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 4

Differentialgeometrie I - SS 09

Abgabe 13.05.2009

Aufgabe 10
Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang und $\mathcal{R}$ der Krümmungstensor von (M, g). Beweisen Sie die *2. Bianchi-Identität* für den Krümmungstensor:

$$(\nabla_X \mathcal{R})(Y, Z, U, V) + (\nabla_Y \mathcal{R})(Z, X, U, V) + (\nabla_Z \mathcal{R})(X, Y, U, V) = 0.$$

3 P

Aufgabe 11
Sei $F : (M, g) \longrightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ eine Isometrie zwischen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie: Ist ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang von (M, g) und $\widetilde{\nabla}$ der Levi-Civita-Zusammenhang von $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, so gilt:

$$\widetilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y) = dF(\nabla_X Y) \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

3 P

Aufgabe 12
Mit H bezeichnen wir den $\mathbb{R}^3$, versehen mit der folgenden Gruppenstruktur:

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') := (x + x', y + y', z + z' + xy').$$

(H heißt *Heisenberg-Gruppe*).
Wir betrachten auf H die Riemannsche Metrik h, die durch das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}^3}$ auf $T_{(0,0,0)}H \simeq \mathbb{R}^3$ und die Bedingung gegeben ist, dass alle Linksmultiplikationen

$$L_{(a,b,c)} : (x, y, z) \in H \longmapsto (a, b, c) \cdot (x, y, z) \in H$$

Isometrien von (H, h) sind. Desweiteren bezeichne X_1, X_2, X_3 die durch folgende Formeln gegebenen Vektorfelder auf H:

$$X_1(x, y, z) := (1, 0, 0), \quad X_2(x, y, z) := (0, 1, x), \quad X_3(x, y, z) := (0, 0, 1).$$

Bestimmen Sie die Schnittkrümmungen $K_{E_{ij}}((x, y, z))$ in Richtung der Unterräume $E_{ij} := span(X_i(x, y, z), X_j(x, y, z)) \subset T_{(x,y,z)}H$.

4 P

Zusatzaufgabe 12*
Wir betrachten die Lie-Gruppe $SU(2)$ mit der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$. Sei h die linksinvariante Metrik auf $SU(2)$, die durch das Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{su}(2)} := -\frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\,(X \circ Y)$$

auf $\mathfrak{su}(2)$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass $(SU(2), h)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung 1 ist.

4* P

Insgesamt: **10 + 4* P**