Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 6

Differentialgeometrie I - SS 09

Abgabe 27.05.2009

Aufgabe 16
Zeigen Sie, dass die semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung $S_p^n(r)$ und $H_p^n(r)$ (siehe Aufgabe 13) geodätisch vollständig sind.

Hinweis: Bezeichne $M := S_p^n(r)$ bzw. $M := H_p^n(r)$. Sei $v \in T_xM$ und $E := span\{x, v\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Parametrisieren Sie die Kurve $\Gamma := E \cap M$ geeignet und zeigen Sie, dass dadurch alle Geodäten von M entstehen.

4 P

Aufgabe 17
Sei g die folgende Metrik auf $\mathbb{R}^2$:

$$g_{(x,y)} := (\cos^4 y - 1)\, dx^2 - 2dxdy.$$

Zeigen Sie:

a) $(\mathbb{R}^2, g)$ ist eine Lorentz-Mannigfaltigkeit.

b) $(\mathbb{R}^2, g)$ ist nicht geodätisch vollständig.
Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass $\gamma(t) := \left(\frac{1}{t} - t, \arctan(t)\right)$ eine geodätische Linie in $(\mathbb{R}^2, g)$ ist.

Bemerkung:
$dxdy$ ist die Abkürzung für das symmetrische Tensorprodukt:

$$dxdy := \frac{1}{2}(dx \otimes dy + dy \otimes dx)$$

dx^2 ist die Abkürzung für $dx \otimes dx = dxdx$.

4 P

Aufgabe 18
Sei $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte reguläre Kurve mit $\gamma_1 > 0$. Die durch γ entstehende Rotationsfläche im $\mathbb{R}^3$

$$M := \{f(u, v) := (\gamma_1(v)\cos(u), \gamma_1(v)\sin(u), \gamma_2(v)) \mid u \in \mathbb{R}, v \in (a, b)\}$$

sei eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, die wir mit der induzierten Riemannschen Metrik versehen. Beweisen Sie:

a) *Alle* auf Bogenlänge parametrisierten Meridiane $\delta_{u_0}(t) := f(u_0, v(t))$ sind geodätische Linien auf M.

b) Ein auf Bogenlänge parametrisierter Breitenkreis $\alpha_{v_0}(t) := f(u(t), v_0)$ ist eine geodätische Linie auf M genau dann, wenn $\gamma_1'(v_0) = 0$, d.h., wenn die Tangente der Kurve $(\gamma_1, 0, \gamma_2)$ im Parameter v_0 parallel zur z-Achse ist.

c) Sei $\delta(t) := f(u(t), v(t))$ nun eine beliebige auf Bogenlänge parametrisierte Kurve auf M. Bezeichne $\beta(t)$ den Schnittwinkel zwischen der Kurve δ und dem Breitenkreis durch den Punkt $\delta(t)$ und $r(t)$ den Radius dieses Breitenkreises. Falls $0 < \beta(t) < \pi$, so gilt die *Clairaut'sche Regel*:

δ ist eine geodätische Linie auf M genau dann, wenn die Funktion $t \to r(t)\cos(\beta(t))$ konstant ist.

d) Skizzieren Sie mit Hilfe von a) - c) das Verhalten von Geodäten auf einigen Rotationsflächen Ihrer Wahl, z.B. *Zylinder, Kegel, Sphäre, Torus, Katenoid, Paraboloid etc.).*

6 P

Insgesamt: **14 P**