



# Übungsblatt 8

## Differentialgeometrie I - SS 09

Abgabe 10.06.2009

### Aufgabe 22

Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $U \subset M$  eine konvexe Umgebung in  $M$ . Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \Gamma : U \times U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto g_{\gamma_{xy}(t)}(\gamma'_{xy}(t), \gamma'_{xy}(t)) \end{aligned}$$

wobei  $\gamma_{xy} : [0, 1] \rightarrow U$  die eindeutig bestimmte Geodäte mit  $\gamma_{xy}(0) = x$  und  $\gamma_{xy}(1) = y$  ist. Für einen fixierten Punkt  $x \in U$  bezeichne  $\Gamma : U \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $\Gamma_x(y) := \Gamma(x, y)$  und  $r_x \in \mathfrak{X}(U)$  das radiale Vektorfeld, definiert durch  $r_x(y) := \gamma'_{xy}(1)$ . Beweisen Sie:

a) In Normalkoordinaten bzgl.  $x \in U$  gilt

$$\begin{aligned} \Gamma_x(y) &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)x_i(y)x_j(y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(y)x_i(y)x_j(y) \\ r_x(y) &= \sum_{i=1}^n x_i(y) \frac{\partial}{\partial x_i}(y) \end{aligned}$$

b)  $\text{grad}(\Gamma_x) = 2r_x$ .

c)  $g(\text{grad}(\Gamma_x), \text{grad}(\Gamma_x)) = 4 \cdot \Gamma_x$ .

4 P

### Aufgabe 23

Sei  $(S_1^n, g)$  die Lorentz-Sphäre (De Sitter-Raum) (siehe Aufgabe 13 und 16), d.h.

$$S_1^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

mit der durch die Minkowski-Metrik

$$\langle x, y \rangle_{1,n} := -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

induzierten Lorentz-Metrik  $g$ . Wir wissen bereits, dass  $(S_1^n, g)$  eine zusammenhängende geodätisch-vollständige Lorentz-Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung 1 ist.

Zeigen Sie, dass es zu jedem  $p \in S_1^n$  einen Punkt  $q \in S_1^n$  gibt, den man nicht durch eine von  $p$  ausgehende Geodäte erreichen kann (Skizze). Insbesondere ist  $(S_1^n, g)$  nicht geodätisch-zusammenhängend.

*Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass für jede Geodäte  $\gamma$  die folgende Abschätzung gilt:*

$$\langle \gamma(t), \gamma(0) \rangle_{1,n} \geq -1 \quad \forall t.$$

4 P

**Aufgabe 24**

Seien  $(M, g)$  und  $(N, h)$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten,  $d_g$  und  $d_h$  die durch  $g$  bzw.  $h$  definierten Abstandsfunktionen. Zeigen Sie, dass jede bijektive Abbildung  $F : M \rightarrow N$  mit

$$d_g(x, y) = d_h(F(x), F(y)) \quad \forall x, y \in M$$

eine Isometrie ist, d.h. ein Diffeomorphismus mit  $F^*h = g$ .

**4 P**Insgesamt: **12 P**