



# Übungsblatt 9

## Differentialgeometrie I - SS 09

Abgabe 17.06.2009

---

### Aufgabe 25

1. Seien  $g$  und  $\tilde{g}$  Riemannsche Metriken auf  $M$  und gelte  $\tilde{g}(v, v) \geq g(v, v)$  für alle  $v \in TM$ . Zeigen Sie: Ist  $(M, g)$  geodätisch-vollständig, so ist  $(M, \tilde{g})$  ebenfalls geodätisch-vollständig.
2. Sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine Untermannigfaltigkeit mit induzierter Riemannscher Metrik  $g$ . Zeigen Sie, dass  $(M, g)$  geodätisch-vollständig ist, falls  $M$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^N$  abgeschlossen ist.

4 P

### Aufgabe 26

Es sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung  $K$ . Seien  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma'(0) = v$  und  $u, w \in T_x M$ . Wir bezeichnen mit  $U, W \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  die Parallelverschiebungen von  $u - g_x(u, v)v$  bzw.  $w - g_x(w, v)v$  entlang  $\gamma$ .

Zeigen Sie, dass das Jacobi-Feld  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  mit den Anfangsbedingungen  $Y(0) = u$  und  $Y'(0) = w$  durch die folgende Formel gegeben ist:

$$Y(t) = \hat{Y}(t) + g_x(w, v) t \gamma'(t) + g_x(u, v) \gamma'(t),$$

wobei

$$\hat{Y}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \sin(t\sqrt{K}) \cdot W(t) + \cos(t\sqrt{K}) \cdot U(t) & \text{falls } K > 0, \\ U(t) + tW(t) & \text{falls } K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-K}} \cdot \sinh(t\sqrt{-K}) \cdot W(t) + \cosh(t\sqrt{-K}) \cdot U(t) & \text{falls } K < 0. \end{cases}$$

4 P

### Aufgabe 27

Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma'(0) = v$ . Sei des Weiteren  $w \in T_x M$  ein Einheitsvektor, der senkrecht auf  $v$  steht.

Zeigen Sie, dass für die Norm des Jacobi-Feldes  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  mit den Anfangsbedingungen  $Y(0) = 0$  und  $Y'(0) = w$  die folgende Taylorentwicklung gilt:

$$\|Y(t)\| = t - \frac{1}{6} K_{\text{span}(v, w)}(x) t^3 + O(t^4).$$

Welche Informationen folgen daraus für das Verhalten von Geodäten ?

4 P