



Übungsblatt 10

Differentialgeometrie I - SS 09

Abgabe 24.06.2009

Aufgabe 28

Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir nennen eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ *konvex*, wenn ihre Hesse-Form $Hess(f) := \nabla(df) \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M)$ in jedem Punkt positiv-semidefinit ist. Eine offene Menge $U \subset M$ heißt *total-konvex*, wenn jede Geodäte γ mit Anfangs- und Endpunkt in U vollständig in U verläuft.

Zeigen Sie: Ist $f \in C^\infty(M)$ konvex, so ist die Teilmenge $U_t := f^{-1}((-\infty, t)) \subset M$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ total-konvex.

Hinweis: Zeigen Sie dazu zuerst, dass f genau dann konvex ist, wenn für jede Geodäte $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ die Funktion $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex ist.

4 P

Aufgabe 29

Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist das Variations-Vektorfeld $Y(t) := \frac{\partial V}{\partial s}(t, s)|_{s=0}$ jeder *geodätischen* Variation $V : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ ein Jacobifeld. Zeigen Sie umgekehrt: Ist $\gamma : I \rightarrow M$ eine Geodäte und $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ ein Jacobifeld entlang γ , so ist Y das Variations-Vektorfeld zu

$$V(t, s) := \exp_{\alpha(s)} \left(t \cdot \mathcal{P}_{\alpha(s)}^g(\gamma'(0) + s \cdot Y'(0)) \right).$$

Dabei bezeichnet α die Geodäte mit den Anfangsbedingungen $\alpha(0) = \gamma(0)$ und $\alpha'(0) = Y(0)$, sowie $\mathcal{P}_{\alpha(s)}^g : T_{\alpha(0)}M \rightarrow T_{\alpha(s)}M$ die Parallelverschiebung entlang α .

4 P

Aufgabe 30

Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und U eine Normalenumgebung von x , so dass $\exp_x(v) \in U$ genau dann, wenn $\exp_x(-v) \in U$.

Zeigen Sie: Ist die Abbildung $s_x : U \rightarrow U$, die die radialen Geodäten an x spiegelt, d.h.

$$s_x(\exp_x(v)) := \exp_x(-v),$$

eine Isometrie, so gilt $(\nabla R)_x = 0$.

4 P

Insgesamt: 12 P