



# Übungsblatt 11

## Differentialgeometrie I - SS 09

Abgabe 01.07.2009

---

### Aufgabe 31

Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ein Killingfeld auf  $(M, g)$ .

Zeigen Sie: Ist  $X(p) = 0$  und  $(\nabla X)(p) = 0$  für *einen* Punkt  $p \in M$ , so folgt  $X = 0$ .

(Zwei Killingfelder  $X$  und  $Y$  stimmen also überein, wenn es einen Punkt  $p \in M$  mit  $X(p) = Y(p)$  und  $(\nabla X)(p) = (\nabla Y)(p)$  gibt.)

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass die Menge  $A := \{x \in M \mid X(x) = 0, (\nabla X)(x) = 0\}$  mit  $M$  übereinstimmt.

4 P

### Aufgabe 32

Sei  $(M^n, g)$  eine  $n$ -dimensionale zusammenhängende semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\text{Kill}(M^n, g)$  der Vektorraum aller Killingfelder von  $(M^n, g)$ .

Zeigen Sie für die Dimension von  $\text{Kill}(M, g)$ :

$$\dim \text{Kill}(M^n, g) \leq \frac{1}{2}n(n+1).$$

*Hinweis:* Benutzen Sie Aufgabe 31.

4 P

### Aufgabe 33

Zeigen Sie, dass jedes Killingfeld einer *geodätisch-vollständigen* semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit *vollständig* ist.

Geben Sie ein Beispiel einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit an, die sowohl vollständige, als auch nicht-vollständige Killingfelder besitzt.

*Hinweis:* OBdA. kann man annehmen dass die betrachtete Mannigfaltigkeit  $M$  zusammenhängend ist. Sei  $X$  ein Killingfeld auf  $(M, g)$  und  $p \in M$ . Wir fixieren ein  $\epsilon > 0$  und eine Umgebung  $U(p)$ , so dass der Fluss von  $X$  auf  $U(p) \times (-\epsilon, \epsilon)$  definiert ist. Wir betrachten die Menge  $B \subset M$ , die aus allen Punkten  $x \in M$  besteht, die eine Umgebung  $U(x)$  besitzen, so dass der Fluss von  $X$  auf  $U(x) \times (-\epsilon, \epsilon)$  (mit dem gleichen  $\epsilon$ ) definiert ist. Zeigen Sie  $B = M$  und schlussfolgern Sie daraus die Behauptung.

6 P

Insgesamt: 14 P