Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 12

Differentialgeometrie I - SS 09

Abgabe 08.07.2009

Aufgabe 34
Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, TM das Tangentialbündel und $\pi : TM \longrightarrow M$ die Projektion, die jedem Tangentialvektor seinen Fußpunkt zuordnet. Zeigen Sie: Es existiert ein Vektorfeld $G \in \mathfrak{X}(TM)$ mit folgender Eigenschaft:

a) Ist $\alpha : I \longrightarrow TM$ eine Integralkurve von G, so ist $\pi \circ \alpha : I \longrightarrow M$ Geodäte von (M, g).

b) Ist $\gamma : I \longrightarrow M$ eine Geodäte in (M, g), so ist $\gamma' : I \longrightarrow TM$ Integralkurve von G.

G heißt geodätisches Vektorfeld auf TM, sein Fluß heißt geodätischer Fluß.

4 P

Aufgabe 35
Zeigen Sie, dass jede semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung lokal-symmetrisch ist.

3 P

Aufgabe 36
Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *symmetrisch*, wenn es für jeden Punkt $x \in M$ eine Isometrie $s_x : M \longrightarrow M$ gibt mit $s_x(x) = x$ und $(ds_x)_x = -Id_{T_xM}$.

a) Zeigen Sie, dass jede symmetrische semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) lokal-symmetrisch und geodätisch vollständig ist.

b) Zeigen Sie, dass jede einfach-zusammenhängende, geodätisch vollständige, lokal-symmetrische semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit symmetrisch ist.
Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Cartan/Ambrose/Hicks.

6 P

Insgesamt: **13 P**