Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Prof. Dr. Andreas Schröder

Übungsaufgaben für Einführung in die Approximationstheorie (SS 2012)

Serie 2

Aufgabe 1

Es sei $f_0 \in R$, $g_0 \in U$ und $g_1 \in T_\epsilon := \{g \in U \mid |g - g_0| \geq \epsilon\}$ mit $|f_0 - g_0| = \delta(f_0, U)$ sowie $|f_0 - g_1| = \delta(f_0, T_\epsilon)$. Zeigen Sie: $|f_0 - g_1| \leq \delta(f_0, U) + \epsilon$.

Aufgabe 2

Es sei U abgeschlossen. Zeigen Sie die Aussagen von Satz 1.18:

1. $\delta(f, U) \geq 0$ für $f \in R$. $\delta(f, U) = 0$ gilt genau dann, wenn $f \in U$.

2. $\delta(\alpha f, U) = |\alpha|\delta(f, U)$ für alle $f \in R$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $\delta(f_1 + f_2, U) \leq \delta(f_1, U) + \delta(f_2, U)$ für alle $f_1, f_2 \in R$.

4. $\delta(f, U)$ ist eine Norm im Faktorraum R/U.

5. $|\delta(f_1, U) - \delta(f_2, U)| \leq |f_1 - f_2|$ für $f_1, f_2 \in R$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie die Aussage von Lemma 1.23: $F \subset R$ ist genau dann präkompakt, falls für alle $\epsilon > 0$ (Mittel-)Punkte $x_0, \ldots, x_m$ existieren, so dass $F \subset \bigcup_{i=1}^m K_\epsilon(x_i)$ ist.

Aufgabe 4

Es sei R ein Hilbertraum und $\{0\} \neq U \subset R$ ein abgeschlossener Unterraum sowie $f \in R$ und $g \in U$. Da R uniform konvex ist, existiert eine stetige Abbildung P, die jedem Element aus R sein Proximum in U zuordnet. Zeigen Sie die Aussagen von Sazu 1.29:

1. $f - P(f) \in \{y \in R \mid \forall x \in U : \ (x, y) = 0\} =: \tilde{U}$.

2. $f - g \in \tilde{U} \quad \Rightarrow g = P(f)$.

3. P ist linear und es gilt: $|P| = 1$.

4. $R = U \oplus \tilde{U}$.