Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Peter Imkeller,
Markus Bibinger, Dr. Hanna Döring,
Alexander Fromm

Blatt 3
SS 2011
3. Mai 2011

Übungen zu Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Zu einem Tanzabend kommen n Paare (jeweils ein Herr mit einer Dame). Um für Abwechslung zu sorgen, wird nach einer gewissen Zeit jeder Dame zufällig einer der Herren zugelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der ursprünglichen Paare wieder miteinander tanzt?
Beweisen Sie zunächst per Induktion nachfolgendes Inklusions- und Exklusionsprinzip:
Für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{l=1}^{n}\left((-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}\right)\right).$$

Bestimmen Sie hiermit die obige Wahrscheinlichkeit und den Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.

Aufgabe 2 (5 Punkte).
Ein fairer Würfel wird dreimal nacheinander geworfen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird in den drei Würfen keine gerade Zahl geworfen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine monoton wachsende und mit welcher Wahrscheinlichkeit eine streng monoton wachsende Sequenz?

c) Die Zufallsvariable M bezeichne das Maximum der drei geworfenen Augenzahlen. Zeigen sie, dass für $1 \leq k \leq 6$ gilt:
$$\mathbb{P}(M = k) = \frac{3k(k-1)+1}{216}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Es seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_X und F_Y. Welche Beziehungen gelten dann zwischen den folgenden beiden Aussagen?

a) $Y(\omega) \leq X(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$

b) $F_X(z) \leq F_Y(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$ [1]

Zeigen Sie: Für *b)* ist es hinreichend, dass der sogenannte Likelihood-Quotient der Zähldichten $L(\cdot) := \rho_X(\cdot)/\rho_Y(\cdot)$ monoton wachsend ist[2]. Dabei sind $\rho_X, \rho_Y : M \to [0,1]$ mit abzählbarem $M \subset \mathbb{R}$, so dass $F_X(z) = \sum_{u \in M, u \leq z} \rho_X(u)$ und $F_Y(z) = \sum_{u \in M, u \leq z} \rho_Y(u)$ für alle $z \in \mathbb{R}$.
Ist diese Bedingung auch notwendig für *b)*?

---

[1] In diesem Fall nennt man X *stochastisch größer* als Y.
[2] Dabei verwenden wir die Konvention $\frac{0}{0} := 0$, $\frac{c}{0} := \infty$ für $c > 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Ereignisraum und sei $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ additiv mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) $\mathbb{P}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

b) $\mathbb{P}$ ist stetig von unten, d.h. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$ für alle $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

c) $\mathbb{P}$ ist stetig von oben, d.h. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$ für alle $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

d) $\mathbb{P}$ ist stetig von oben in $\emptyset$, d.h. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ für alle $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Abgabe: Donnerstag, 05.05.2011, **bis 13.15, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25**
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Abgabe in Zweiergruppen ist möglich.