Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Peter Imkeller,
Markus Bibinger, Dr. Hanna Döring,
Alexander Fromm

Blatt 4
SS 2011
6. Mai 2011

Übungen zu Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte).

a) Eine Firma stellt Elektrogeräte mit einer Betriebsspannung von 220 Volt bzw. 110 Volt her. Beim Export einer Ladung von 40 Geräten in das Land N, dessen Stromnetz mit der Spannung 220 Volt betrieben wird, werden versehentlich 6 Geräte mit einer Betriebsspannung von 110 Volt mitgeführt. An einem bestimmten Tag sollen 5 der 40 Geräte in Betrieb genommen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 5 Geräte eine Betriebspannung von 220 Volt besitzen?

b) Eine Urne enthält fünf rote, vier weiße und drei blaue Kugeln. Eine Kugel wird zufällig aus der Urne gezogen, ihre Farbe notiert und dann wieder zurückgelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von sechs in dieser Weise ausgewählten Kugeln drei rot, 2 weiß und eine blau ist? Wie ändert sich die Lösung, wenn nur rote und nicht-rote Kugeln unterschieden werden?

Aufgabe 2 (3 Punkte).
Beim Radioaktiven Zerfall ist die Zufallsvariable X für die Anzahl der pro Sekunde zerfallenden Atomkerne Poisson-verteilt mit dem Parameter λ. Dieser gibt an, wie viele Atomkerne durchschnittlich pro Sekunde zerfallen. Bei einem speziellen Präparat zerfallen im Mittel pro Minute 120 Atomkerne.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit beobachtet man mit einem Zählgerät mehr als 2 Zerfälle pro Sekunde?

Aufgabe 3 (5 Punkte).
Am Abend eines Wahltages werden die Stimmen für zwei konkurrierende Kandidaten A und B ausgezählt. Beide Kandidaten seien gleich beliebt, d.h. auf jedem Stimmzettel sei A oder B mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit $1/2$ angekreuzt; insgesamt gebe es $2N$ Stimmen. Sei $X_i = 1$ oder -1 je nachdem, ob die i-te Stimme für A oder B ist. Die Summe $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$ gibt dann an, wie weit A nach Auszählung von j Stimmen vor B führt (bzw. hinter B zurückliegt). Sei $n \in \{1, \dots, N\}$ und $u_n := 2^{-2n}\binom{2n}{n}$.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an. Wie ist die Verteilung von $(S_j)_{j=0,\dots,2N}$ auf dem Raum $\Gamma := \{(a_j)_{j=0,\dots,2N} \in \mathbb{Z}^{2N+1} \,|\, a_0 = 0,\, |a_j - a_{j-1}| = 1 \text{ für alle } j = 1, \dots, 2N\}$?

b) Geben Sie für alle $n \in \{1, \dots, N\}$ durch eine geeignete Spiegelung eine Bijektion zwischen den beiden folgenden Mengen an:

$$\Gamma'_n := \{(a_j)_{j=0,\dots,2N} \in \Gamma \,|\, a_1 = 1,\, a_{2n-1} = 1,\, a_j = 0 \text{ für mindestens ein } j \in \{2, \dots, 2n-2\}\}$$

$$\Gamma''_n := \{(a_j)_{j=0,\dots,2N} \in \Gamma \,|\, a_1 = 1,\, a_{2n-1} = -1\}$$

c) Zeigen Sie, dass für das Ereignis $G_n = \{S_{2n} = 0,\, S_{2k} \neq 0 \text{ für } 1 \leq k \leq n\}$ („erster Gleichstand nach Auszählung von $2n$ Stimmen“) gilt

$$\mathbb{P}(G_n) = 2^{-2n+1}\left[\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\right] = u_{n-1} - u_n\,.$$

d) Zeigen Sie, dass für das Ereignis $F_n = \{S_{2k} \neq 0 \text{ für } 1 \leq k \leq n\}$ („kein Gleichstand während der ersten $2n$ Stimmen“) gilt $\mathbb{P}(F_n) = u_n$.

Aufgabe 4 (5 Punkte).
Wir definieren rekursiv eine Folge $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen von abgeschlossenen Intervallen durch:

$$\mathcal{C}_1 = \{[0,1]\}$$

$$\mathcal{C}_{n+1} = \{[a, a + \frac{1}{3}(b-a)] \mid [a,b] \in \mathcal{C}_n\} \cup \{[a + \frac{2}{3}(b-a), b] \mid [a,b] \in \mathcal{C}_n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es sei $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Teilmengen des $[0,1]$ definiert durch $C_n := \bigcup_{[a,b]\in\mathcal{C}_n} [a,b]$ für $n \in \mathbb{N}$. $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ ist die sogenannte Cantor-Menge. Es gilt $\lambda(C) = \int_C 1 \cdot \mathrm{d}x = 0$, d.h. C ist eine Nullmenge.
Es sei nun F_n die (stetige) Verteilungsfunktion der Gleichverteilung auf C_n, d.h.

$$F_n(t) := \frac{\lambda(C_n \cap (-\infty, t])}{\lambda(C_n)} = \frac{\int_{C_n\cap(-\infty,t]} \mathrm{d}x}{\int_{C_n} \mathrm{d}x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \int_{C_n\cap(-\infty,t]} \mathrm{d}x$$

für $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine stetige Verteilungsfunktion F konvergiert. Begründen Sie für das dazugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß μ: $\mu(C^c) = 0$.

b) Zeigen Sie, dass μ weder diskret ist, nocht absolutstetig. Das heißt man kann μ weder in der Form $\mu(A) = \sum_{y\in Y\cap A} \rho(y)$, $A \in \mathcal{B}_{[0,1]}$ mit abzählbarem $Y \subset [0,1]$ und $\rho : Y \to [0,1]$ darstellen, noch in der Form $\mu(A) = \int_A \rho(x)\,\mathrm{d}x$, $A \in \mathcal{B}_{[0,1]}$ mit messbarer Dichte $\rho : [0,1] \to [0,\infty)$.

Abgabe: Donnerstag, 12.05.2011, **bis 13.15, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25**
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Abgabe in Zweiergruppen ist möglich.