Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Peter Imkeller,
Markus Bibinger, Dr. Hanna Döring,
Alexander Fromm

Blatt 6
SS 2011
19. Mai 2011

Übungen zu Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Gegeben ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ω und $\emptyset$ sind von jedem $A \in \mathcal{F}$ unabhängig.

b) Sind $A, B \in \mathcal{F}$ unabhängig folgt nicht notwendigerweise die Unabhängigkeit von $A \cap B$ und $A \cup B$.

c) Sind $A, B \in \mathcal{F}$ unabhängig, so gilt dies auch für die Paare (A, B^c), (A^c, B), sowie (A^c, B^c)

d) Sind $A, B, C \in \mathcal{F}$ stochastisch unabhängig, so auch $A \cap B$ und C ebenso wie $A \cup B$ und C.

Aufgabe 2 (3 Punkte).
Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse $E =$"Augensumme ergibt 7", $F =$"erster Wurf ergibt 4" und $G =$"zweiter Wurf ergibt 3". Untersuchen Sie die drei Ereignisse (E, F, G), sowie die Paare (E, F), (F, G), (E, G) auf Unabhängigkeit.
Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{P}(E|F \cap G)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Eine Urne enthalte $s \in \mathbb{N}$ schwarze und $w \in \mathbb{N}$ weiße Kugeln. Es werde unendlich oft je eine Kugel gezogen, die zusammen mit $c \in \mathbb{N}$ Kugeln der gleichen Farbe in die Urne zurückgelegt wird.
Es seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, $\{0, 1\}$-wertige Zufallsvariablen, die angeben, welche Kugel im i-ten Schritt gezogen wurde, wobei 0 für schwarz und 1 für weiß steht. Zeigen Sie für alle $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ rekursiv die Formel:

$$\mathbb{P}(X_1 = \omega_1, X_2 = \omega_2, \ldots, X_n = \omega_n) = \frac{\prod_{i=0}^{l_n-1}(w + c \cdot i) \prod_{j=0}^{n-l_n-1}(s + c \cdot j)}{\prod_{k=0}^{n-1}(s + w + c \cdot k)},$$

wobei $l_n := \sum_{i=1}^{n} \omega_i$.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Zähldichte $\rho_{n|\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Es seien w, s, c, sowie X_i, $i \in \mathbb{N}$, wie in Aufgabe 3. Wir definieren $L_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(L_n = l) = \int_0^1 B_{n,p}(l)\beta_{a,b}(p)\,\mathrm{d}p$$

mit $l \in \mathbb{Z}_+$, $B_{n,p}(l) = \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l}$, $a := \frac{w}{c}$, $b := \frac{s}{c}$, $\beta_{a,b}(p) := \frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{\int_0^1 p^{a-1}(1-p)^{b-1}\,\mathrm{d}p}$, $p \in (0, 1)$.
$\beta_{a,b}$ ist die Dichte der sogenannten Betaverteilung mit Parametern a, b.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für die Betafunktion B, gegeben durch $B(a, b) = B(b, a) = \int_0^1 p^{a-1}(1-p)^{b-1}\,\mathrm{d}p$ für alle $a, b > 0$, gilt: $B(a + 1, b) = \frac{a}{a+b} B(a, b)$ für $a, b > 0$.

Abgabe: Donnerstag, 26.05.2011, **bis 13.15, Ablagefach vor Raum 1.209, RUD 25**
Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen. Abgabe in Zweiergruppen ist möglich.