Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning

Übungsklausur

Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte:									
max. Punkte:									

Matrikel-Nr.	
Raum Nr.	

Hinweise zur Bearbeitung:

- Lesen Sie die Aufgaben sorgfältig und aufmerksam durch, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Wenn Sie sich nicht vollkommen sicher sind, die Fragestellung verstanden zu haben, dann fragen Sie vor Bearbeitung der Aufgabe den Assistenten.
- Bitte bearbeiten Sie alle Aufgaben jeweils auf einem einzelnen Blatt, da die Klausuren aufgabenweise korrigiert werden.

Viel Erfolg!

Aufgaben zur Maßtheorie:

Aufgabe 1. Betrachten Sie das Mengensystem $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\mathcal{P}_n := \{\{2\}, \{4\}, \ldots, \{2n\}\}.$$

a) Bestimmen Sie die σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{P}_n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

b) Zeigen Sie, dass

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{P}_n)$$

keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 2. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}\, dx.$$

Aufgabe 3. Definieren Sie das Lebesgue-Maß unter der Annahme, dass das äußere Lebesgue-Maß bekannt sei.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden mehrfachen Integrale:

$$a) \quad \int_0^{2\sqrt{\log 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\log 3}} e^{(x^2)}\, dxdy, \qquad b) \quad \int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos\, 16\pi x^5\, dxdy.$$

Aufgaben zur Vektoranalysis:

Aufgabe 5. Die Abbildung $F : S^2 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$F(x, y, z) := (-y, x, 0).$$

Zeigen Sie, dass F ein Vektorfeld auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist.

Hinweis: Sie kennen die Definition der Divergenz in diesem Fall noch nicht!

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (x^2 - y, -2yx)$ und sei $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wie in der Vorlesung. Sei c_r der geschlossene Weg entlang des Kreises vom Radius r **mit positiver Orientierung**. Berechnen Sie $\int_{c_r} Jf$ für $r = 1$ und $r = 2$.

Aufgabe 7. Bezeichne $A \subset \mathbb{R}^2$ die Fläche, die von den Geraden $y = -x/2$, $y = 1 - x/2$, $y = x$ und $y = x - 1$ eingeschlossen wird. Benutzen Sie die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \end{pmatrix},$$

um damit das Integral

$$\int_A (x+2y)e^{(y-x)}\,dxdy$$

zu berechnen.

Aufgabe 8. Geben Sie einen Atlas für S^2 an, der aus genau zwei Karten $(U,x), (\tilde{U},\tilde{x})$ besteht, und zeigen Sie, dass diese beiden Karten tatsächlich einen Atlas bilden, d.h. dass $x \circ \tilde{x}^{-1}$ eine C^∞-Abbildung ist.