Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning

Lösungen zur Übungsklausur

Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

Aufgaben zur Maßtheorie:

Aufgabe 1. Betrachten Sie das Mengensystem $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\mathcal{P}_n := \{\{2\}, \{4\}, \dots, \{2n\}\}.$$

a) Bestimmen Sie die σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{P}_n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

b) Zeigen Sie, dass

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{P}_n)$$

keine σ-Algebra ist.

Lösung:

a) $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{P}_n) = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{B \subset \mathbb{N} \ : \ B \subset \{2, 4, \dots, 2n\}\} \cup \{B \subset \mathbb{N} \ : \ 2k \in B \, \forall k > n \text{ und } 2k-1 \in B \, \forall k \in \mathbb{N}\}\}$.

b) Beweis durch Widerspruch: Annahme

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{P}_n)$$

ist eine σ-Algebra. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $B_n := \{2, 4, \dots, 2n\} \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{P}_n)$, müsste dann für die Vereinigung gelten:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{P}_n).$$

Aber da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \notin \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{P}_n),$$

erhält man somit einen Widerspruch, womit die zu zeigenden Aussage bewiesen ist.

Aufgabe 2. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}\, dx.$$

Lösung: $f_n(x) := \frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}$ konvergiert punktweise gegen 0 und kann durch $g \in L^1([1,\infty))$, $g(x) := x^{-5/2}$ majorisiert werden. Also konvergiert die Folge der Integrale gegen 0 nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz.

Aufgabe 3. Definieren Sie das Lebesgue-Maß unter der Annahme, dass das äußere Lebesgue-Maß bekannt sei.

Lösung: Das Lebesgue-Maß ist die Vervollständigung des äußeren Lebesgue-Maßes, das heißt:

Bezeichne λ_n^* das äußere Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$.

> Dann heißt $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{A}_{\lambda_n^*}$ die σ-Algebra der Lebesgue-Mengen.
>
> Das auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eingeschränkte Maß $\lambda_n := \lambda_n^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n}$ heißt n-dimensionales Lebesgue-Maß.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden mehrfachen Integrale:

$$a) \quad \int_0^{2\sqrt{\log 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\log 3}} e^{(x^2)}\, dxdy, \qquad b) \quad \int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos\, 16\pi x^5\, dxdy.$$

Lösung: Mit Hilfe des Satzes von Fubini lassen sich beide Integrale leicht berechnen.

$$\begin{aligned} a) \quad \int_0^{2\sqrt{\log 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\log 3}} e^{(x^2)}\, dxdy &= \int_0^{\sqrt{\log 3}} \int_0^{2x} e^{(x^2)}\, dydx \\ &= \int_0^{\sqrt{\log 3}} 2xe^{(x^2)}\, dx \\ &= \left[e^{(x^2)}\right]_0^{\sqrt{\log 3}} \quad = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos\, 16\pi x^5\, dxdy &= \int_0^{1/2} \int_0^{x^4} \cos\, 16\pi x^5\, dydx \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{16\pi} \int_0^{1/2} 5x^4(16\pi) \cos\, 16\pi x^5\, dx \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{16\pi} \left[\sin\, 16\pi x^5\right]_0^{1/2} \quad = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{16\pi} \end{aligned}$$

Aufgaben zur Vektoranalysis:

Aufgabe 5.

Hinweis: Aufgabe gestrichen!

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = (x^2 - y, -2yx)$ und sei $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wie in der Vorlesung. Sei c_r der geschlossene Weg entlang des

Kreises vom Radius r **mit positiver Orientierung**. Berechnen Sie $\int_{c_r} Jf$ für $r = 1$ und $r = 2$.

Lösung Man rechnet leicht nach, dass $\operatorname{div} f = 0$ gilt. Ferner kann man beispielsweise durch Angabe einer geeigneten Parametrisierung leicht erkennen, dass c_r regulär parametrisierbar ist. Es bezeichne U die von dem geschlossenen Weg c_r eingeschlossene Fläche, also $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = r^2\}$. Dann ist ∂U regulär parametrisierbar, und es gilt für den Weg c_r mit positiver Orientierung laut Vorlesung:

$$\int_U \operatorname{div} f(x)\, dx = \int_{c_r} Jf.$$

Aus $\operatorname{div} f = 0$ folgt also $\int_{c_r} Jf = 0$ für $r = 1$ und $r = 2$.

Aufgabe 7. Bezeichne $A \subset \mathbb{R}^2$ die Fläche, die von den Geraden $y = -x/2$, $y = 1 - x/2$, $y = x$ und $y = x - 1$ eingeschlossen wird. Benutzen Sie die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \end{pmatrix},$$

um damit das Integral

$$\int_A (x + 2y) e^{(y-x)}\, dxdy$$

zu berechnen.

Lösung: Aus der Aufgabenstellung ergibt sich die Transformation ϕ mit $\phi(u, v) = \frac{1}{3}(u+2v, u-v)$. Weiter lässt sich leicht nachrechnen, dass $|\det D\phi| = 1/3$ und $\phi(A) = [0, 2] \times [0, 1]$. Zu berechnen ist dann

$$\frac{1}{3} \int_0^2 \int_0^1 u e^{-v}\, dvdu = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{e}).$$

Aufgabe 8. Geben Sie einen Atlas für S^2 an, der aus genau zwei Karten $(U, x), (\tilde{U}, \tilde{x})$ besteht, und zeigen Sie, dass diese beiden Karten tatsächlich einen Atlas bilden, d.h. dass $x \circ \tilde{x}^{-1}$ eine C^∞-Abbildung ist.

Lösung: Bezeichne $N = (0, 0, 1)$ den Nordpol und entsprechend $S = (0, 0, -1)$ den Südpol von S^2. Dann sind $(S^2 \setminus \{N\}, x)(S^2 \setminus \{s\}, \tilde{x})$ zwei mögliche Karten, wobei

$$x(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right) \text{ und } \tilde{x}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 + x_3}, \frac{x_2}{1 + x_3} \right).$$

Die inverse Abbildung zu x ist gegeben durch

$$x^{-1}(y_1, y_2) = \frac{1}{1 + \|y\|^2}(2y_1, 2y_2, -1 + \|y\|^2), \text{ wobei } \|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

Damit ergibt sich, dass $x \circ \tilde{x}^{-1}$ als Verknüpfung von C^∞-Abbildungen eine C^∞-Abbildung ist.