Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

ÜBUNGSBLATT 2

Abgabe am 05.11.2008 vor der Vorlesung (bis 13.10 Uhr)

Aufgabe 1. Sei X eine Menge, sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring, und sei μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Zeigen Sie:

a) Durch $A \sim B :\Leftrightarrow \mu(A\Delta B) = 0,\ A, B \in \mathcal{R}$ wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{R}$ definiert.

b) Die Äquivalenzklasse $\mathcal{N}$ der leeren Menge enthält genau die μ-Nullmengen in $\mathcal{R}$.

c) Für alle $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \sim B$ gilt $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cup B) = \mu(A \cap B)$.

d) Sei μ zusätzlich endlich und sei $\delta : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\delta(A, B) := \mu(A\Delta B)$. Zeigen Sie, dass δ eine Halbmetrik auf $\mathcal{R}$ ist, d.h. $\delta(A, A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$, δ ist symmetrisch, und δ erfüllt die Dreiecksungleichung. Zeigen Sie ferner, dass $|\mu(A) - \mu(B)| \le \delta(A, B)$.

(8 Punkte)

Aufgabe 2. Sei X eine nichtleere Menge.

a) Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ ein Inhalt mit $\mu(X) = 1$. Sei $\mathcal{U} := \{A \subset X \mid \mu(A) = 1\}$. Zeigen Sie:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{U}$

(ii) $A \in \mathcal{U},\ A \subset B \subset X \ \Rightarrow\ B \in \mathcal{U}$

(iii) $A, B \in \mathcal{U} \ \Rightarrow\ A \cap B \in \mathcal{U}$

(iv) $A \subset X \ \Rightarrow A \in \mathcal{U} \ \vee\ (X \setminus A) \in \mathcal{U}$

Eine Menge, die diese vier Eigenschaften erfüllt, heißt Ultrafilter auf X und sollte Ihnen aus der Vorlesung Analysis $2^\star$ (Beweis des Satzes von Tychonow) bekannt sein.

b) Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf X und sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & A \in \mathcal{U}, \\ 0 & X \setminus A \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass μ ein Inhalt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass μ genau dann ein Maß ist, wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathcal{U}$ gilt:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

(8 Punkte)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jeder auf einem Halbring $\mathcal{H}$ definierte Inhalt μ eine eindeutige Fortsetzung ν auf den von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$ besitzt, und dass diese Fortsetzung gegeben ist durch:

$$\mathcal{R} \ni A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \text{ wobei } A_k \in \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad \nu(A) := \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

(4 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis3.html