Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

ÜBUNGSBLATT 4

Abgabe am 19.11.2008 vor der Vorlesung (bis 13.10 Uhr)

Aufgabe 1. Beweisen Sie Satz 7.3.8 aus der Vorlesung.

(6 Punkte)

Aufgabe 2. Sei E die Menge der Eckpunkte von C, dem Cantorschen Diskontinuum. Zeigen Sie, dass

$$E = \left\{ x \in [0,1] \; : \; x = \sum_{j=1}^{k} 2x_j \cdot 3^{-j} + \alpha \sum_{j \geq k+1} 2 \cdot 3^{-j}, \; k \in \mathbb{N}, \; \alpha, x_j \in \{0,1\} \right\}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3.

a) Es sei $H \subset \mathbb{R}^m$ ein Unterraum der Dimension $n < m$. Zeigen Sie, dass $H \in \mathcal{L}^m$ mit $\lambda^m(H) = 0$.

b) Die Sphäre vom Radius $r > 0$ im $\mathbb{R}^m$ ist $S_r^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m \; : \; |x| = r\}$. Zeigen Sie, dass $S_r^{m-1} \in \mathcal{L}_0^m$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4. Bezeichne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die σ-Algebra der Borel-Mengen des $\mathbb{R}$. Betrachten Sie die Menge $\mathcal{U} := \{B \times \mathbb{R} \; : \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ eine σ-Algebra über $\mathbb{R}^2$ ist, dass $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}^2$ und dass das Maß $\lambda^2|\mathcal{U}$ nicht σ-endlich ist.

(4 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis3.html