Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

ÜBUNGSBLATT 7

Abgabe am 10.12.2008 vor der Vorlesung (bis 13.10 Uhr)

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $f : [a,b]\times I \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ eine Funktion mit $f(x,\cdot) \in \widetilde{L^1}(I,\lambda^1)$ für jedes $x \in [a,b]$. Für $x \in [a,b]$ schreiben wir $F(x) := \int_I f(x,y)\, d\lambda^1(y)$. Zeigen Sie:

a) Wenn die Funktion $f(\cdot,y) : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x,y)$ für jedes $y \in I$ auf $[a,b]$ stetig ist, d.h. $f(\cdot,y) \in C([a,b])$, und es eine Funktion $g \in \widetilde{L^1}(I,\lambda^1)$ gibt mit $|f(x,y)| \le g(y)$ für alle $x \in [a,b], y \in I$, dann ist die Funktion F stetig auf $[a,b]$.

b) Wenn für alle $(x,y) \in (a,b) \times I$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ existiert und es eine Funktion $h \in \widetilde{L^1}(I,\lambda^1)$ gibt mit $|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}| \le h(y)$ für alle $x \in (a,b), y \in I$, dann gilt: Für jedes $x \in (a,b)$ ist die Funktion $\frac{\partial f(x,\cdot)}{\partial x} : I \to \mathbb{R},\ y \mapsto \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, ein Element in $\widetilde{L^1}((a,b),\lambda^1)$. Ferner ist die Funktion F differenzierbar auf (a,b), und es gilt:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_I f(x,y)\, d\lambda^1(y) = \int_I \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, d\lambda^1(y).$$

c) Begründen Sie, dass die Voraussetzungen in a) und b) erfüllt sind, falls I kompakt ist und f stetig auf $[a,b] \times I$ ist bzw. $\frac{\partial f(\cdot,\cdot)}{\partial x}$ eine stetige Fortsetzung auf $[a,b] \times I$ besitzt.

(3+4+1 Punkte)

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, dass mit den Bezeichnungen der Vorlesung gilt:

$$(\mathcal{A}_e \otimes \mathcal{B}_e)_\sigma = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

(3 Punkte)

Bitte wenden →

b) Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ bezeichne. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ genau dann ein Element in $\widetilde{L^1}(\mathbb{N}, \mu)$ ist, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert, und dass in diesem Fall gilt:

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

(2 Punkte)

c) Formulieren Sie den Satz von Fubini für den Spezialfall, dass $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, also dem Maßraum aus Aufgabe 2b) entspricht.

(3 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $f : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie die folgende Identität mit Hilfe des Satzes von Fubini:

$$\int_a^b \int_a^y f(x, y) \, d\lambda_1(x) \, d\lambda_1(y) = \int_a^b \int_x^b f(x, y) \, d\lambda_1(y) \, d\lambda_1(x).$$

(4 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis3.html